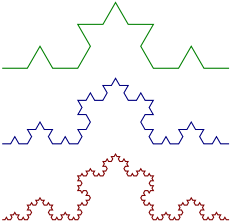
Integrales Triples

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Mecánica
Universidad Nacional de Ingeniería



Calculo Vectorial

CONTENIDO

Definición

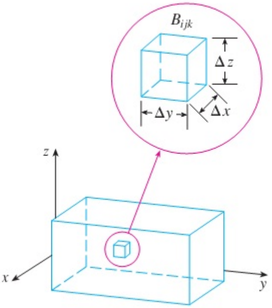
Definición

La integral triple de f sobre la caja B es

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V$$

si el límite existe.

INTEGRAL TRIPLE



VOLUMEN DE UN SOLIDO E

$$f(x, y, z) = 1$$

$$\text{Volumen(E)}=\iiint_E dV$$

Teorema (Teorema de Fubini)

Si f es continua sobre la caja rectangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ entonces

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz$$

Ejemplo

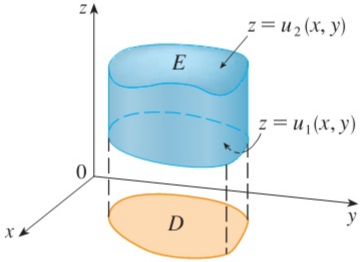
Evaluar la integral triple $\iiint_B xyz^2 dV$ donde B está dado por

$$B = \{(x, y, z) \ / \ 0 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 2, \ 0 \leq z \leq 3\}$$

INTREGALES TRIPLES SOBRE REGIONES ACOTADAS

$$E = \{(x,y,z) \ / \ (x,y) \in D, \ \ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

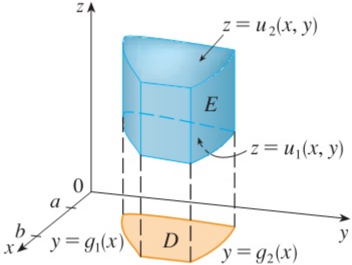
$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$



Integrales triples sobre regiones acotadas

$$E = \{(x,y,z) \ / \ a \leq x \leq b, \ \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \ \ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

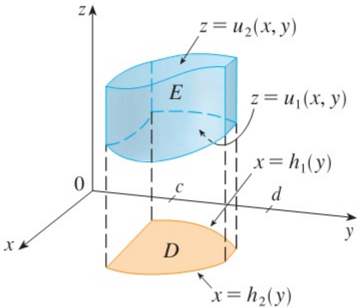
$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$



Intregales triples sobre regiones acotadas

$$E = \{(x,y,z)\ /\ c \leq y \leq d,\ \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ \ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$



Ejemplo

Evaluar $\iiint_Q z dV$, *donde Q es el tetraedro acotado por los planos* $x = 0,\ y = 0,\ z = 0\,;x + y + z = 1$

Ejercicio 1

Ejercicio

Evalúe la integral

$$\iiint_E 2y\,dV$$

Si E es el sólido acotado por los planos $x + 2y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

Ejercicio 2

Ejercicio

Evalúe la integral

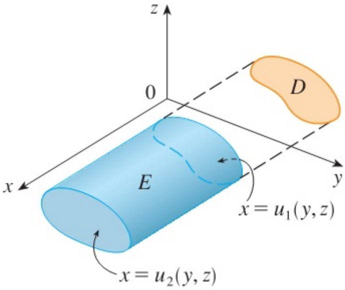
$$\iiint_E y\cos(x+z)\,dV$$

Si E es el sólido acotado por el cilindro $x = y^2$ *y los planos* $x + z = \pi/2, y = 0, z = 0$

Intregales triples sobre regiones acotadas

$$E = \{(x, y, z) \ / \ (y, z) \in D, \ \ u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

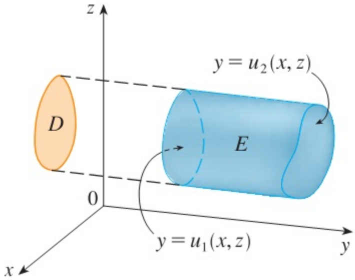
$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)dx\right] dA$$



INTREGALES TRIPLES SOBRE REGIONES ACOTADAS

$$E = \{(x,y,z) \ / \ (x,z) \in D, \ \ u_1(x,z) \leq y \leq u_2(x,z)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right] dA$$



Centro de Masa y Momento de Inercia

Masa de un Solido

$$m = \iiint_Q \rho(x,y,z)dV$$

Momentos

$$M_{yz} = \int_Q x\rho(x,y,z)dV$$

$$M_{xz} = \int_Q y\rho(x,y,z)dV$$

$$M_{xy} = \int_Q z\rho(x,y,z)dV$$

y Centro de Masa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$

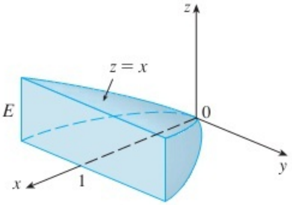
$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

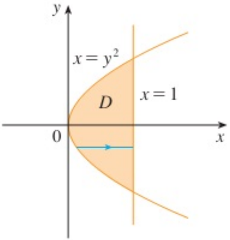
Ejemplo

Ejemplo

Encontrar el centro de masa de un solido de densidad constante que es acotada por el cilindro parabólico $x = y^2$ *y los planos* $x = z$ $,z = 0;,$ $x = 1.$

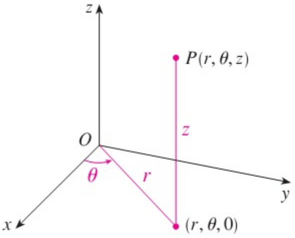
Solución





Integrales Triples en Coordenadas Cilindricas

$$r \geq 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

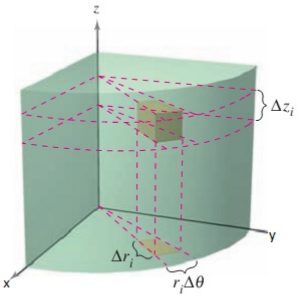


$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, & x^2 + y^2 &= r^2 \\ y &= r\sin\theta, & \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ z &= z, & z &= z \end{aligned}$$

Ejemplo

1. *Coordenadas Cilindricas* $(2, 2\pi/3, 1)$ *a Coordenadas Rectangulares.*
2. *Coordenadas Rectangulares* $(3, -3, -7)$ *a Coordenadas Cilindricas.*

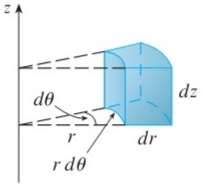
Coordenadas Cilindricas



Coordenadas Cilindricas

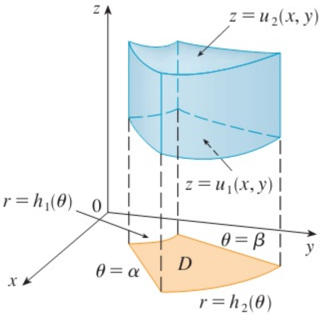
Diferencial de volumen en coordenadas cilindricas

$$\Delta V = r\Delta r\Delta\theta\Delta z$$



Coordenadas Cilindricas

$$E = \{(x, y, z) \;\; / \;\; (x, y) \in D, \;\; u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$



donde:

$$D = \{(r, \theta) \;\; / \;\; \alpha \leq \theta \leq \beta, \;\; h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

Coordenadas Cilindricas

Evaluación de la integral triple en coordenadas cilindricas

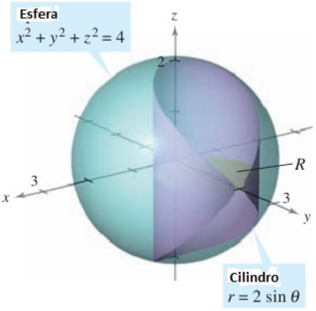
$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_{u_1(r,\theta)}^{u_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz\right] dA$$

Ejemplo

Hallar el volumen de la región sólida Q que corta en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

el cilindro $r = 2\sin\theta$*, como se muestra en la figura.*



JACOBIANO

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

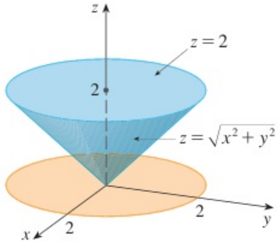
$$J(r,\theta,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

Ejemplo

Evaluar

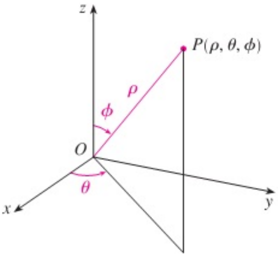
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx$$

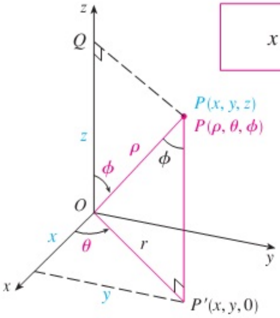
Solución



Coordenadas Esféricas

$\rho \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$





$$\boxed{x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi}$$

$$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

Cambio de variable

$$\boxed{\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iiint_S f\big(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw}$$