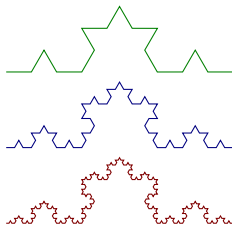


Integrales Triples

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Industrial
Universidad Nacional Mayor de San Marcos



Matemática II



CONTENIDO

Integrales Triples
Introducción

Centro de Masa y Momento de Inercia

Integrales Triples en Coordenadas Cilindricas

Coordenadas Cilindricas





DEFINICIÓN

Definición

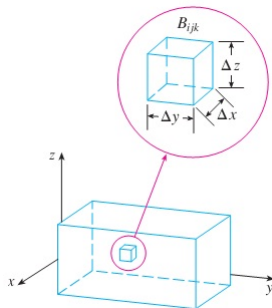
La integral triple de f sobre la caja B es

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

si el límite existe.



INTEGRAL TRIPLE



VOLUMEN DE UN SOLIDO E

$$f(x, y, z) = 1$$

$$\text{Volumen}(E) = \iiint_E dV$$



Teorema (Teorema de Fubini)

Si f es continua sobre la caja rectangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ entonces

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

Ejemplo

Evaluar la integral triple $\iiint_B xyz^2 dV$ donde B está dado por

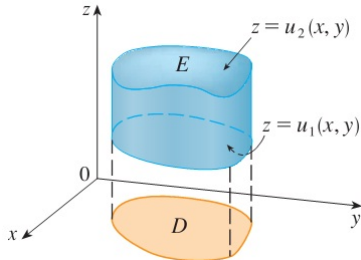
$$B = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$



INTREGALES TRIPLES SOBRE REGIONES ACOTADAS

$$E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

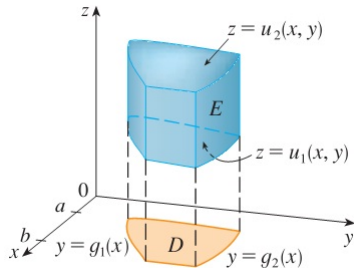
$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$



INTREGALES TRIPLES SOBRE REGIONES ACOTADAS

$$E = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \quad u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

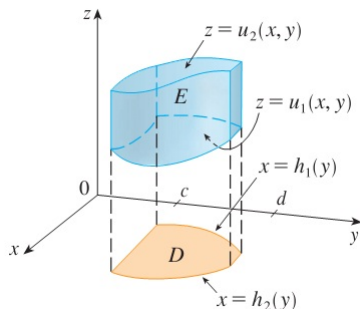
$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$



INTREGALES TRIPLES SOBRE REGIONES ACOTADAS

$$E = \{(x, y, z) / c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$



Ejemplo

Evaluar $\iiint_Q z dV$, donde Q es el tetraedro acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x + y + z = 1$



EJERCICIO 1

Ejercicio

Evalúe la integral

$$\iiint_E 2y dV$$

Si E es el sólido acotado por los planos $x + 2y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$



EJERCICIO 2

Ejercicio

Evalúe la integral

$$\iiint_E y \cos(x + z) dV$$

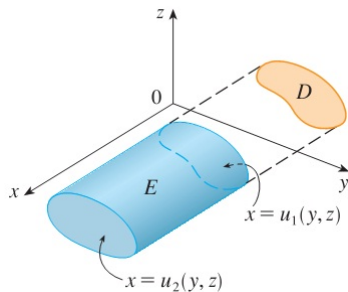
Si E es el sólido acotado por el cilindro $x = y^2$ y los planos $x + z = \pi/2$, $y = 0$, $z = 0$



INTREGALES TRIPLES SOBRE REGIONES ACOTADAS

$$E = \{(x, y, z) / (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

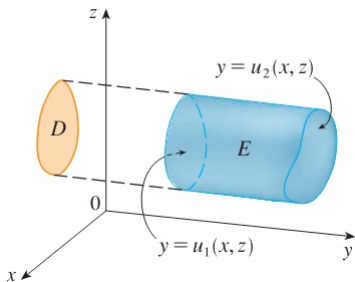
$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$



INTREGALES TRIPLES SOBRE REGIONES ACOTADAS

$$E = \{(x, y, z) / (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$



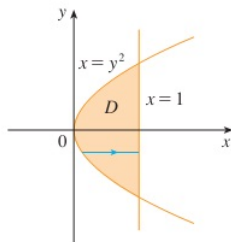
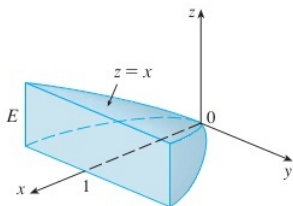
EJEMPLO

Ejemplo

Encontrar el centro de masa de un solido de densidad constante que es acotada por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$; $x = 1$.

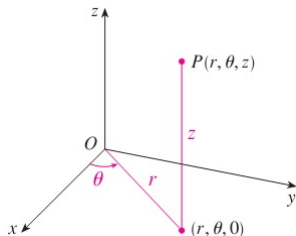


SOLUCIÓN



INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILINDRICAS

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & x^2 + y^2 &= r^2 \\ y &= r \sin \theta, & \tan \theta &= \frac{y}{x} \\ z &= z, & z &= z \end{aligned}$$

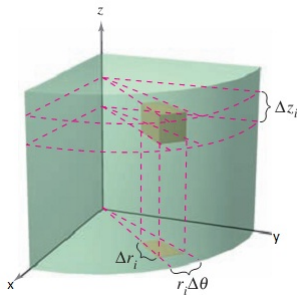


Ejemplo

1. *Coordenadas Cilindricas* $(2, 2\pi/3, 1)$ a *Coordenadas Rectangulares*.
2. *Coordenadas Rectangulares* $(3, -3, -7)$ a *Coordenadas Cilindricas*.



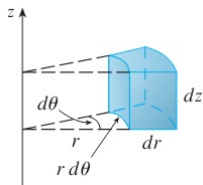
COORDENADAS CILINDRICAS



COORDENADAS CILINDRICAS

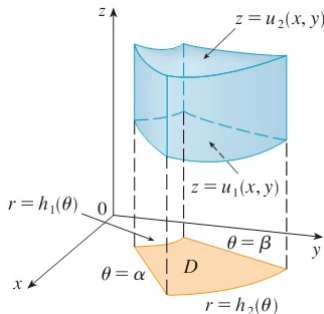
Diferencial de volumen en coordenadas cilindricas

$$\Delta V = r \Delta r \Delta \theta \Delta z$$



COORDENADAS CILINDRICAS

$$E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$



donde:

$$D = \{(r, \theta) / \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$



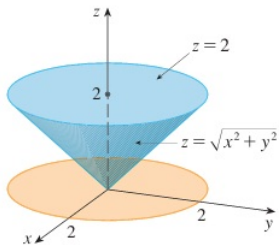
JACOBIANO

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$J(r, \theta, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

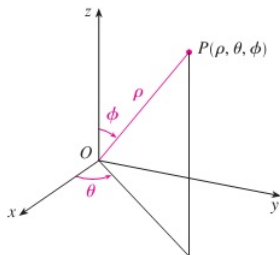


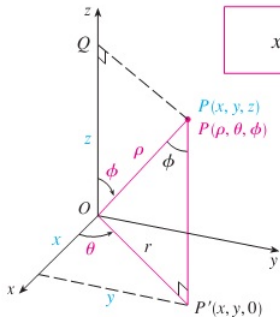
SOLUCIÓN



COORDENADAS ESFÉRICAS

$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$





$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



CAMBIO DE VARIABLE

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

