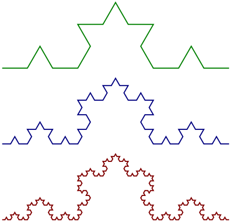
Valores y Vectores Propios

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Industrial
Universidad Nacional Mayor de San Marcos



Métodos Computacionales

CONTENIDO

Definiciones y propiedades

- **A** matriz cuadrada $n \times n$
- **v** vector dimensión n
- λ escalar

Objetivo: Buscar escalares λ y vectores *no nulos* **v** tales que

$$\mathbf{A}v = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \text{ valor propio de } \mathbf{A} \\ \mathbf{v} \text{ vector propio asociado a } \lambda \end{cases}$$

Definición

$$p(\lambda) = det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$$

los valores propios de A son las raíces del polinomio característico

$$\lambda \text{ } valor \text{ } propio \Leftrightarrow p(\lambda) = 0$$

Cálculo de vectores propios
Para cada valor propio λ resolvemos

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

que debe ser un sistema compatible indeterminado.

DIAGONALIZACIÓN

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$.
Si $\mathbf{A}$ tiene n valores propios distintos $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ y $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ son vectores propios asociados, entonces

$$\boxed{\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}}$$

- $\mathbf{D}$ es matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_n)$ tiene en columnas los vectores propios

Ejemplo

Ejemplo

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule:

1. *Valores Propios*
2. *Vectores Propios*
3. *Diagonaliza la matriz* A

Solución

(a) Valores propios

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (3-\lambda)^2(2-\lambda) - (3-\lambda) - (3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)\left[(3-\lambda)(2-\lambda) - 2\right] \\ &= (3-\lambda)\underbrace{\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right)}_{\text{factorizamos}} \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(3-\lambda)(\lambda - 4)$$

- Valores propios. Soluciones de $p(\lambda) = 0$

$$\boxed{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4}$$

- El espectro de $\mathbf{A}$ es

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{1, 3, 4\}$$

- El radio espectral de $\mathbf{A}$ es

$$\rho(\mathbf{A}) = 4$$

(b) Cálculo de vectores propios.

- Vectores propios asociados a $\lambda = 1$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\ \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(1^a + 2 \cdot 2^a) \to 1^a \begin{cases} y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

vectores propios asociados a $\lambda = 1$ $\quad \mathbf{v} = t\mathbf{v}_1$, con $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) Diagonalización

- Base de vectores propios

$$\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$$

- Matriz de cambio

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Diagonalización

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 12 & 0 \\ -4 & 9 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar los valores propios de la matriz A.

EJEMPLO:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 12 & 0 \\ -4 & 9 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar los valores propios de la matriz A.

Solución:

Hallando el polinomio caraterístico asociado a la matriz A.

Su polinomio característico es

$p(\lambda) = |A - \lambda.I| = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$

$\lambda = 1$ de multiplicidad 2

$\lambda = 3$ de multiplicidad 1

TEOREMA

Teorema (Teorema de Gershgorin)

Sea **A** una matriz cuadrada de orden n, y denotemos por R_i el circulo en el plano complejo con centro en a_{ij} y radio

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{es decir} \qquad R_i = \{z \in C \,/\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\}$$

donde *C* se usa para denotar el plano complejo. Los valores propios de A están contenidos dentro de

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

y la unión de cualquiera *k* de estos círculos que no intersecten a los *(n-k)* restantes, deben contener precisamente *k* (contando multiplicidades) valores propios.

Ejemplo

Para la matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Localice todos sus valores propios:

EJEMPLO

Para la matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Localice todos sus valores propios:

Solución:

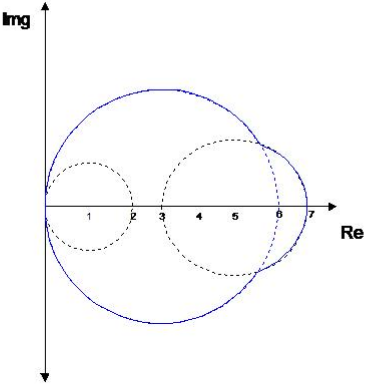
Los circulos $Z_i (i = 1, 2, 3)$, con radio r_i

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{z \in C \ |z - 5| \leq |-2| + |0|\} \\ Z_2 &= \{z \in C \ |z - 3| \leq |-2| + |-1|\} \\ Z_3 &= \{z \in C \ |z - 1| \leq |0| + |1|\} \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propios están localizados en:

$$0 \leq z \leq 7$$

CIRCULOS DE GERSGORIN



Método de la Potencia

Definición (Valor Propio Dominante)

Es el de mayor módulo. Si

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_1| \ldots > |\lambda_n|$$

entonces λ_1 es el valor propio dominante.

Definición (Vector Normalizado)

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

v_j es una componente dominante. Si $|v_j| = ||\boldsymbol{v}||_\infty$
Si v_{dom} es una componente dominante de $\boldsymbol{v}$, entonces el vector normalizado $\bar{\boldsymbol{v}}$ es

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{v_{dom}}.\boldsymbol{v}$$

Ejemplo *Dado el vector*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determina la componente dominante y calcula el vector normalizado.

- Componente dominante

$$v_{dom} = v_3 = -4 \qquad |v_3| = \|\mathbf{v}\|_\infty$$

- Vector normalizado

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{v_{\text{dom}}}\mathbf{v} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

Método de Potencia

- $\mathbf{A}$ matriz de dimensión $n \times n$ con valores propios

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$$

- Vectores propios asociados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$
- $\mathbf{x}^{(0)}$ un vector que se puede escribir

$$\mathbf{x}^{(0)} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \quad \text{con } \alpha_1 \neq 0$$

- **Método**

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(j+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(j)} \\ c_{j+1} = \text{ componente dominante de } \mathbf{y}^{(j+1)} \\ \mathbf{x}^{(j+1)} = \frac{1}{c_{j+1}} \mathbf{y}^{(j+1)} \ \left(\text{Normalizado de } \mathbf{y}^{(j+1)}\right) \end{cases}$$

EJEMPLO:

Ejemplo *Aproxima el valor propio dominante y un vector propio asociado de la matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Inicia las iteraciones con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

- Fase 1

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = 2 \quad (\text{componente dominante de } \mathbf{y}^{(0)})$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbf{y}^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$