

Valores Propios

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Mecánica
Universidad Nacional de Ingeniería

Métodos Numéricos



Contenido

1 Valores Propios



Definiciones y propiedades

- \mathbf{A} matriz cuadrada $n \times n$
- \mathbf{v} vector dimensión n
- λ escalar

Objetivo: Buscar escalares λ y vectores *no nulos* \mathbf{v} tales que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \text{ valor propio de } \mathbf{A} \\ \mathbf{v} \text{ vector propio asociado a } \lambda \end{cases}$$



Definición

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

los valores propios de A son las raíces del polinomio característico

$$\lambda \text{ valor propio} \Leftrightarrow p(\lambda) = 0$$

Cálculo de vectores propios

Para cada valor propio λ resolvemos

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

que debe ser un sistema compatible indeterminado.



Diagonalización

Sea \mathbf{A} una matriz $n \times n$.

Si \mathbf{A} tiene n valores propios distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son vectores propios asociados, entonces

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$$

- \mathbf{D} es matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \cdots | \mathbf{v}_n)$ tiene en columnas los vectores propios



Ejemplo

Ejemplo

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule:

- 1 *Valores Propios*
- 2 *Vectores Propios*
- 3 *Diagonaliza la matriz A*



Solución

(a) Valores propios

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (3 - \lambda)^2(2 - \lambda) - (3 - \lambda) - (3 - \lambda) \\ &= (3 - \lambda)[(3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2] \\ &= (3 - \lambda) \underbrace{(\lambda^2 - 5\lambda + 4)}_{\text{factorizamos}} \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(3 - \lambda)(\lambda - 4)$$



- Valores propios. Soluciones de $p(\lambda) = 0$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$$

- El espectro de \mathbf{A} es

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{1, 3, 4\}$$

- El radio espectral de \mathbf{A} es

$$\rho(\mathbf{A}) = 4$$



(b) Cálculo de vectores propios.

- Vectores propios asociados a $\lambda = 1$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(1^a + 2 \cdot 2^a) \rightarrow 1^a \begin{cases} y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

vectores propios asociados a $\lambda = 1$ $\mathbf{v} = t\mathbf{v}_1$, con $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



(c) Diagonalización

- Base de vectores propios

$$\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$$

- Matriz de cambio

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Diagonalización

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 12 & 0 \\ -4 & 9 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar los valores propios de la matriz A .



Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 12 & 0 \\ -4 & 9 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar los valores propios de la matriz A .

Solución:

Hallando el polinomio característico asociado a la matriz A .

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

$\lambda = 1$ de multiplicidad 2

$\lambda = 3$ de multiplicidad 1



Teorema

Teorema (Teorema de Gershgorin)

Sea A una matriz cuadrada de orden n , y denotemos por R_i el círculo en el plano complejo con centro en a_{ii} y radio

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \text{es decir} \quad R_i = \left\{ z \in C / |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}$$

donde C se usa para denotar el plano complejo. Los valores propios de A están contenidos dentro de

$$R = \bigcup_{i=1}^n R_i$$

y la unión de cualquiera k de estos círculos que no intersecten a los $(n-k)$ restantes, deben contener precisamente k (contando multiplicidades) valores propios.

Ejemplo

Para la matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Localice todos sus valores propios:



Ejemplo

Para la matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Localice todos sus valores propios:

Solución:

Los círculos $Z_i (i = 1, 2, 3)$, con radio r_i

$$Z_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 5| \leq |-2| + |0|\}$$

$$Z_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| \leq |-2| + |-1|\}$$

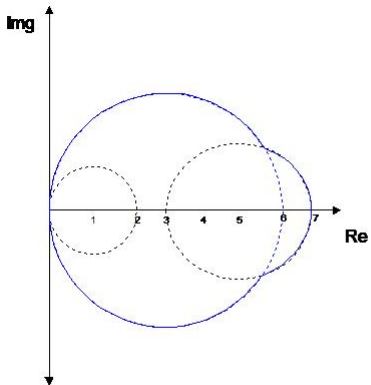
$$Z_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq |0| + |1|\}$$

Por lo tanto los valores propios están localizados en:

$$0 \leq z \leq 7$$



Cirulos de Gersgorin



Método de la Potencia

Definición (Valor Propio Dominante)

Es el de mayor módulo. Si

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \dots > |\lambda_n|$$

entonces λ_1 es el valor propio dominante.



Definición (Vector Normalizado)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

v_j es una componente dominante. Si $|v_j| = \|\mathbf{v}\|_\infty$

Si v_{dom} es una componente dominante de \mathbf{v} , entonces el vector normalizado $\bar{\mathbf{v}}$ es

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{v_{dom}} \cdot \mathbf{v}$$



Ejemplo Dado el vector

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determina la componente dominante y calcula el vector normalizado.

- Componente dominante

$$v_{dom} = v_3 = -4 \quad |v_3| = \|\mathbf{v}\|_\infty$$

- Vector normalizado

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{v_{dom}} \mathbf{v} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$



Método de Potencia

- A matriz de dimensión $n \times n$ con valores propios

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$$

- Vectores propios asociados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$
- $\mathbf{x}^{(0)}$ un vector que se puede escribir

$$\mathbf{x}^{(0)} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \quad \text{con } \alpha_1 \neq 0$$

- Método

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(j+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(j)} \\ c_{j+1} = \text{componente dominante de } \mathbf{y}^{(j+1)} \\ \mathbf{x}^{(j+1)} = \frac{1}{c_{j+1}} \mathbf{y}^{(j+1)} \quad (\text{Normalizado de } \mathbf{y}^{(j+1)}) \end{cases}$$



Ejemplo:

Ejemplo *Aproxima el valor propio dominante y un vector propio asociado de la matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Inicia las iteraciones con

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Fase 1

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 2$ (componente dominante de $\mathbf{y}^{(0)}$)

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbf{y}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

