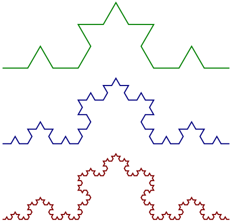
Teoria de Errores

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ingenieria Industrial



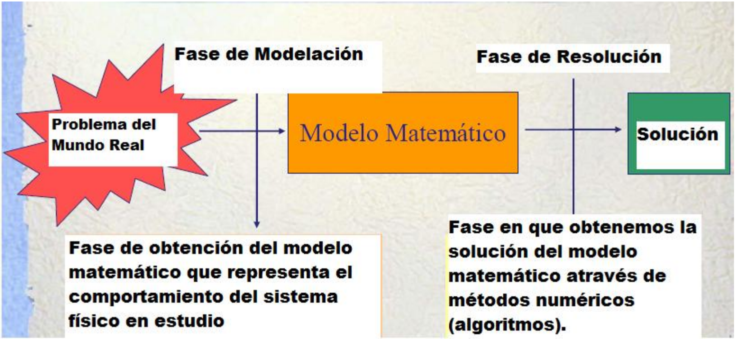
Métodos Computacionales

Agenda

Introducción

Teoria de Errores

Introducción al estudio de métodos computacionales



Aproximación y Errores

- Los cálculos númericos **inevitablemente** conducen a errores
- Estos son de dos clases principales:
  1. Errores de Redondeo
     - Errores asociados con la representación inexacta de números reales por la computadora.
     - Errores asociados con la maquina.
  2. Errores de Truncamiento
     - Errores asociados con el uso de un procedimiento numérico aproximado para reemplazar una expresión matemática exacta.
     - Error asociados con el algoritmos matemático.
- Ambos conducen al error total.

Fuentes de errores

Los errores en el cálculo matemático tienen varias fuentes:

Definición (Error del modelo o error del problema)

En los fenómenos de la naturaleza muchas veces efectuamos ciertas hipótesis, es decir aceptamos determinadas condiciones que nos dará una situación aproximada del fenómeno estudiado, de esta manera podemos plantear el comportamiento de dicho fenómeno por medio de un modelo matemático.

Definición (Error del Método)

Cuando un problema planteado en forma precisa no puede resolverse en forma exacta o es muy difícil de hallar la solución, se fórmula una aproximación del modelo, que ofrezca prácticamente los mismo resultados (método).

Definición (Error Residual)

Son los originados por las series infinitas, al considerar solo una parte finita. Por ejemplo:
Para cierto valor n*.*
$e = 2 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots + 1/n!$

Definición (Error Inicial)

Son los originados por los parámetros cuyos valores son conocidos aproximadamente: Ejemplo: La constante de Planck
$6.63 * 10^{-34}$ *joules*segundo*

Definición (Errores de Redondeo)

Originados por la representación finita de los números, es el caso de las computadoras (notación de punto flotante). Por ejemplo: se redondea en un número finito de dígitos. $2/3$ *se puede redondear a* 0.667

Definición (Error Casual o Accidental(fortuito))

Son los que están vinculados con los factores que sufren pequeñas variaciones (aleatorias) durante el experimento.

Definición (Errores Sistemáticos)

Son aquellos, que sin variar las condiciones del ensayo entran de igual modo en cada resultado de las mediciones, pueden ser originados por:

1. *Defecto del instrumento*
2. *Las condiciones del ambiente*
3. *La metodología de la medición*
4. *Precisión limitada del instrumento*
5. *Las particularidades del experimentador*

Definición (Estabilidad del Problema)

Significa que pequeños cambios en los datos producen pequeños cambios en la solución exacta del problema inicial. De los problemas que no verifican esta propiedad, se dicen que están mal condicionados.

Error absoluto, relativo y precisión

Consideremos "A" el valor exacto de la medida de cierta magnitud (en general desconocida) y sea "a" un valor conocido que se llamará aproximación de "A".
Evidentemente la buena cualidad de la aproximación es de acuerdo a cuan próximo está "a" de "A".

Error Absoluto

Llamamos error absoluto del número aproximado "a" al valor:

$$\xi_a = |A - a|$$

y todo número $\xi_a^* \geq \xi_a$, se denominará cota del error absoluto.

Error absoluto, relativo y precisión

Error Relativo

Llamamos error relativo del número aproximado "a" al valor:

$$\delta_a = \frac{|A - a|}{|A|}, \quad A \neq 0$$

y todo número $\delta_a^* \geq \delta_a$, se denominará cota del error relativo.

Ejemplo

¿Cuál es el error absoluto y relativo de la aproximación 3.14 *al valor de* π *?*

Solución:

$$\xi = |3.14 - \pi| \approx 0.0016$$
$$\delta = \frac{|3.14 - \pi|}{|\pi|} \approx 0.00051$$

Error absoluto, relativo y precisión

Precisión

Dado un $\epsilon > 0$ (pequeño) decimos que el valor "a" aproxima a "A" con una precisión ϵ si:

$$\xi_a = |A - a| \leq \epsilon$$

Definiciones

Sean "A" y "a" dos números reales. Se dice que "a" es una aproximación de "A" con "n" cifras decimales exactas (o que "A" y "a" coinciden en "n" cifras decimales), si "n" es el mayor entero no negativo tal que

$$\xi_a \leq 0.5 \times 10^{-n}$$

Ejemplo

Verificar que $a = 3.1415$ *aproxima a* $A = \pi = 3.141592...$ *con tres cifras decimales exactas*

Definiciones

Sean "A" y "a" dos números reales, con A$\neq 0$. Se dice que "a" es una aproximación de "A" con "n" cifras decimales significativas exactas (o que "A" y "a" coinciden en "n" cifras decimales significativas), si "n" es el mayor entero no negativo tal que

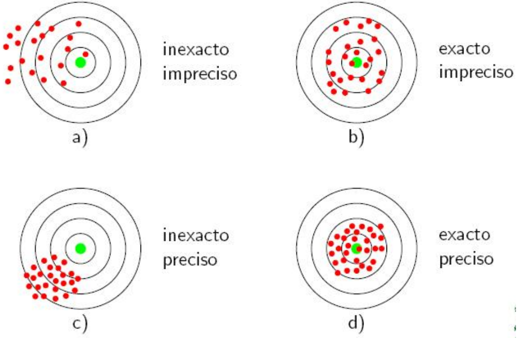
$$\delta_a \leq 5 \times 10^{-n}$$

Ejemplo

Verificar que $a = 124.45$ *aproxima a* $A = 123.45$ *con dos cifras significativas exactas*

Exactitud vs Precisión

Exactitud : Se refiere a qué tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero.
Precisión: Se refiere a qué tan cercanos se encuentran, uno de otros, diversos valores calculados o medidos.



Propagación de errores

Al resolver un problema utilizando métodos numéricos, el error que se genera será consecuencia de un cúmulo de errores ocurridos en pasos sucesivos, se debe estudiar la mecánica de "propagación" de los mismos a lo largo del cálculo.

Propagación de errores

Propagación de errores en sumas y diferencias

Datos iniciales:$x \pm \xi_x$ $y \pm \xi_y$
Sea su suma $q = x + y$ y su diferencia $q = x - y$

¿Cuál es la incertidumbre, ξ_q?

El error absoluto de la suma y de la diferencia de dos o mas magnitudes es la suma de los errores absolutos de dichas magnitudes:

$$q = x \pm y \Rightarrow \xi_q \approx \xi_x + \xi_y$$

Propagación de errores

Ejemplo:
En un experimento se introducen dos líquidos en un matraz y se quiere hallar la masa total del líquido. Se conocen:
M1 $=$ Masa del matraz 1 $+$ contenido $= 540 \pm 10g$
m1 $=$ Masa del matraz 1 $= 72 \pm 1g$
M2 $=$ Masa del matraz 2 $+$ contenido $= 940 \pm 20g$
m2 $=$ Masa del matraz 2 $= 97 \pm 1g$
La masa de líquido será:

$$M = (M_1 - m_1) + (M_2 - m_2) = 1311g$$

Su error:

$$\xi_M = \xi_{M1} + \xi_{m1} + \xi_{M2} + \xi_{m2} = 32g$$

El resultado se expresará:

$$M = 1311 \pm 32g$$

Propagación de errores

Propagación de errores en productos y cocientes

Datos iniciales:

$$x \pm \xi_x = x\left(1 \pm \frac{\xi_x}{|x|}\right) \qquad y \pm \xi_y = y\left(1 \pm \frac{\xi_y}{|y|}\right)$$

Sea su producto $q = xy$ y su cociente $q = x/y$

¿Cuál es la incertidumbre, ξ_q?

El error relativo del producto y el cociente es igual a la suma de los errores relativos de dichas magnitudes:

$$q = xy \Rightarrow \frac{\xi_q}{|q|} \approx \frac{\xi_x}{|x|} + \frac{\xi_y}{|y|}$$

$$q = x/y \Rightarrow \frac{\xi_q}{|q|} \approx \frac{\xi_x}{|x|} + \frac{\xi_y}{|y|}$$

Ejemplo:
Para medir la altura de un árbol L, se mide la longitud de su sombra L_1, la altura de un objeto de referencia L_2, y la longitud de su sombra L_3. Por semejanza:

$$L = L_1.\frac{L_2}{L_3}$$

Realizadas las medidas resultan:

$$L_1 = 200 \pm 2cm,\; L_2 = 100.0 \pm 0.4cm \, L_3 = 10 \pm 0.2cm$$

Por tanto

$$L = 200.\frac{100}{10} = 2000cm$$

su error será

$$\frac{\xi_L}{|L|} \approx \frac{\xi_{L_1}}{|L_1|} + \frac{\xi_{L_2}}{|L_2|} + \frac{\xi_{L_3}}{|L_3|} = \frac{2}{200} + \frac{0.4}{100} + \frac{0.2}{10}$$

$$= (1 + 0.4 + 2)\% = 3.4\% \to \xi_L = \frac{3.4}{100}2000 = 68$$

$$L = 2000 \pm 68cm$$

Error en función de una variable

Datos iniciales:$x \pm \xi_x$. Sea $q = f(x)$ una función cualquiera.

¿Cuál es la incertidumbre, ξ_q ?

$$\xi_q = f(x + \xi_x) - f(x) \approx \frac{df(x)}{dx}\xi_x$$

Si x se mide con un error ξ_x y se utiliza para calcular $q = f(x)$, el error aboluto de q viene dado por:

$$\xi_q = \left|\frac{df(x)}{dx}\right|\xi_x$$

Ejemplo

Hallar el error absoluto y relativo que se comete al elevar a la cuarta el número $x = 2$ cuyo error absoluto es 0.1.

Solución:

$x = 2, \qquad \xi_x = 0.1$

$y = x^4, \qquad \xi_y \approx |\frac{dy}{dx}|\xi_x$

$\xi_y \approx 4x^3\xi_x$

$\xi_y \approx 4(2)^3(0.1)$

$\xi_y \approx 3.2$

$y = 2^4 = 16$ Aproximado

$Y = y \pm \xi_y = 16 \pm 3.2$ Exacto

$Y \in [12.8, 19.2]$ Rango

$\delta_y = \frac{3.2}{16} = 0.2$

Error en función de varias variables

Las reglas para el cálculo de errores que hemos visto se pueden deducir de una fórmula más general que nos permite resolver casos más complicados.

Sean las medidas x e y con errores ξ_x y ξ_y usadas para calcular:

$$q = f(x, y)$$

Mediante un desarrollo en serie para el caso de varias variables:

$$f(x + \xi_x, y + \xi_y) = f(x, y) + |\frac{\partial f}{\partial x}|\xi_x + |\frac{\partial f}{\partial y}|\xi_y + \dots$$

con lo que:

$$\xi_q = f(x + \xi_x, y + \xi_y) - f(x, y) \approx |\frac{\partial f}{\partial x}|\xi_x + |\frac{\partial f}{\partial y}|\xi_y$$

Ejemplo

La corriente pasa a través de una resistencia $R = 20\Omega$ cuya precisión está dentro del 5%, la corriente es de 2 Amp. medida con una aproximación de ± 0.1 Amp. Si $E = IR$. Hallar el error absoluto y relativo.

Solución:

Sabemos que $E = IR$

Sea $\xi_E,\ \xi_I,\ \xi_R$ los errores absolutos.

Propagación de Errores:

$$\xi_E \approx |\frac{\partial E}{\partial I}|\xi_I + |\frac{\partial E}{\partial R}|\xi_R$$

$$\xi_E \approx R\xi_I + I\xi_R$$

Además:

$\xi_I = 0.1$ Amp.

$\xi_R = 5\%(20) = 1\Omega$

Reemplazando:

$\xi_E = 20(0.1) + 2(1) = 4$ voltios

$e = i * r = 2(20) = 40$ Aproximado

$E = 40 \pm 4$ Exacto

$$\delta_e = \frac{\xi_e}{|E|} \approx \frac{4}{40} = 0.1$$

Ejemplo

Se tiene un rectángulo cuyos lados han sido medidos aproximadamente en:
$l = 3$ metros
$h = 2$ metros
¿Cuál es el error permisible con que deben ser medidos l y h, si se desea obtener el área del rectángulo con un error no mayor al 5%?

Solución:

$A = l * h$

$\xi_A = 5\%(6) = 0.3$

$A = 6 \pm 0.3$

Propagación de Errores:

$\xi_A = |\frac{\partial A}{\partial l}|\xi_l + |\frac{\partial A}{\partial h}|\xi_h$

$\xi_A = h * \xi_l + l * \xi_h = 0.3$

$\xi_A = (2)\xi_l + (3)\xi_h = 0.3$

Ahora que hacemos??

Principio de Igual Efecto

Suponemos que cada variable aporta al error en una misma cantidad.

$$\xi_l = \frac{0.3}{2 * 2} = 0.075 \qquad \xi_h = \frac{0.3}{2 * 3} = 0.05$$

Ejercicio

El doblado de láminas metálicas es una operación muy común en un taller mecánico. La deformación de una lámina durante el doblado esta dada por:

$$e = \frac{1}{\left(\frac{2R}{T}\right) + 1}$$

Donde R es el radio de doblez y T es el espesor de la lámina. Una lamina de aleación de aluminio de espesor 2 mm. fue doblada con un radio de doblez de 12 mm, si se desea obtener la deformación con un error no mayor al 5%, ¿qué error en las medidas de R y T son permisibles?

Bibliografía

- Richard L. Burden and J. Douglas Faires
  Análisis numérico, 7a ed.
- Steven C. Chapra and Raymond P. Canale
  Métodos numéricos para ingenieros, 5a ed.