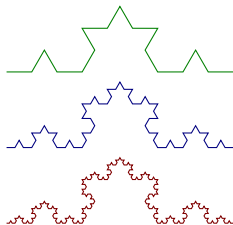


# Teoria de Errores

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería Mecánica



Métodos Numérico

# Agenda



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Teoría de Errores

Introducción

Teoría de Errores

# Introducción al estudio de métodos computacionales



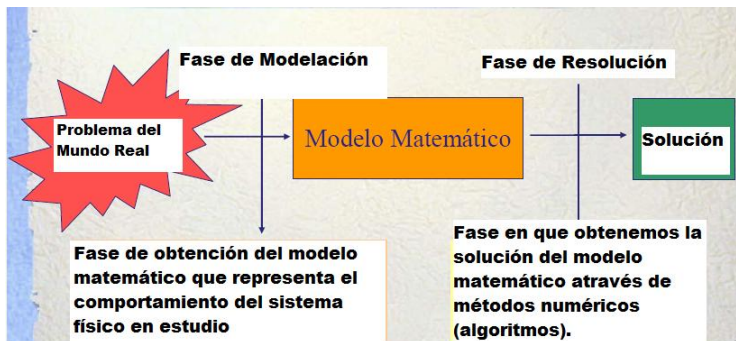
Teoría de Errores

Mg. Hermes Pantoja C.

3

Introducción

Teoría de Errores



# Aproximación y Errores



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

4 Teoría de Errores

- ▶ Los cálculos numéricos **inevitablemente** conducen a errores
- ▶ Estos son de dos clases principales:
  1. Errores de Redondeo
    - ▶ Errores asociados con la representación inexacta de números reales por la computadora.
    - ▶ Errores asociados con la maquina.
  2. Errores de Truncamiento
    - ▶ Errores asociados con el uso de un procedimiento numérico aproximado para reemplazar una expresión matemática exacta.
    - ▶ Error asociados con el algoritmos matemático.
- ▶ Ambos conducen al error total.

# Fuentes de errores



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

5 Teoría de Errores

Los errores en el cálculo matemático tienen varias fuentes:

## Definición (Error del modelo o error del problema)

*En los fenómenos de la naturaleza muchas veces efectuamos ciertas hipótesis, es decir aceptamos determinadas condiciones que nos dará una situación aproximada del fenómeno estudiado, de esta manera podemos plantear el comportamiento de dicho fenómeno por medio de un modelo matemático.*



## Definición (Error del Método)

*Cuando un problema planteado en forma precisa no puede resolverse en forma exacta o es muy difícil de hallar la solución, se fórmula una aproximación del modelo, que ofrezca prácticamente los mismo resultados (método).*



## Definición (Error Residual)

*Son los originados por las series infinitas, al considerar solo una parte finita. Por ejemplo:*

*Para cierto valor  $n$ .*

$$e = 2 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \dots + 1/n!$$

## Definición (Error Inicial)

*Son los originados por los parámetros cuyos valores son conocidos aproximadamente: Ejemplo: La constante de Planck*

$$6.63 * 10^{-34} \text{ joules*segundo}$$



## Definición (Errores de Redondeo)

*Originados por la representación finita de los números, es el caso de las computadoras (notación de punto flotante).*

*Por ejemplo: se redondea en un número finito de dígitos.*

*$2/3$  se puede redondear a 0.667*

## Definición (Error Casual o Accidental(fortuito))

*Son los que están vinculados con los factores que sufren pequeñas variaciones (aleatorias) durante el experimento.*



## Definición (Errores Sistemáticos)

*Son aquellos, que sin variar las condiciones del ensayo entran de igual modo en cada resultado de las mediciones, pueden ser originados por:*

- 1. Defecto del instrumento*
- 2. Las condiciones del ambiente*
- 3. La metodología de la medición*
- 4. Precisión limitada del instrumento*
- 5. Las particularidades del experimentador*



## Definición (Estabilidad del Problema)

*Significa que pequeños cambios en los datos producen pequeños cambios en la solución exacta del problema inicial. De los problemas que no verifican esta propiedad, se dicen que están mal condicionados.*

# Error absoluto, relativo y precisión



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

11 Teoría de Errores

Consideremos "A" el valor exacto de la medida de cierta magnitud (en general desconocida) y sea "a" un valor conocido que se llamará aproximación de "A".

Evidentemente la buena cualidad de la aproximación es de acuerdo a cuan próximo está "a" de "A".

## Error Absoluto

Llamamos error absoluto del número aproximado "a" al valor:

$$\xi_a = |A - a|$$

y todo número  $\xi_a^* \geq \xi_a$ , se denominará cota del error absoluto.

# Error absoluto, relativo y precisión



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

12 Teoría de Errores

## Error Relativo

Llamamos error relativo del número aproximado "a" al valor:

$$\delta_a = \frac{|A - a|}{|A|}, \quad A \neq 0$$

y todo número  $\delta_a^* \geq \delta_a$ , se denominará cota del error relativo.



## Ejemplo

*¿Cuál es el error absoluto y relativo de la aproximación 3.14 al valor de  $\pi$  ?*

### Solución:

$$\xi = |3.14 - \pi| \approx 0.0016$$

$$\delta = \frac{|3.14 - \pi|}{|\pi|} \approx 0.00051$$

# Error absoluto, relativo y precisión



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

14 Teoría de Errores

## Precisión

Dado un  $\epsilon > 0$  (pequeño) decimos que el valor "a" aproxima a "A" con una precisión  $\epsilon$  si:

$$\xi_a = |A - a| \leq \epsilon$$

# Definiciones



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

15 Teoría de Errores

Sean "A" y "a" dos números reales. Se dice que "a" es una aproximación de "A" con "n" cifras decimales exactas (o que "A" y "a" coinciden en "n" cifras decimales), si "n" es el mayor entero no negativo tal que

$$\xi_a \leq 0.5 \times 10^{-n}$$

## Ejemplo

*Verificar que  $a = 3.1415$  aproxima a  $A = \pi = 3.141592\dots$  con tres cifras decimales exactas*

# Definiciones



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

16 Teoría de Errores

Sean "A" y "a" dos números reales, con  $A \neq 0$ . Se dice que "a" es una aproximación de "A" con "n" cifras decimales significativas exactas (o que "A" y "a" coinciden en "n" cifras decimales significativas), si "n" es el mayor entero no negativo tal que

$$\delta_a \leq 5 \times 10^{-n}$$

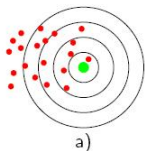
## Ejemplo

*Verificar que  $a = 124.45$  aproxima a  $A = 123.45$  con dos cifras significativas exactas*

# Exactitud vs Precisión

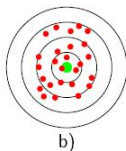
**Exactitud** : Se refiere a qué tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero.

**Precisión**: Se refiere a qué tan cercanos se encuentran, uno de otros, diversos valores calculados o medidos.



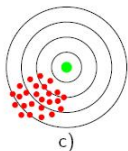
inexacto  
impreciso

a)



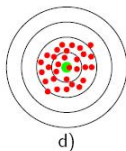
exacto  
impreciso

b)



inexacto  
preciso

c)



exacto  
preciso

d)



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

17 Teoría de Errores

# Propagación de errores



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

18 Teoría de Errores

Al resolver un problema utilizando métodos numéricos, el error que se genera será consecuencia de un cúmulo de errores ocurridos en pasos sucesivos, se debe estudiar la mecánica de "propagación" de los mismos a lo largo del cálculo.



## Propagación de errores en sumas y diferencias

Datos iniciales:  $x \pm \xi_x$                        $y \pm \xi_y$

Sea su suma  $q = x + y$  y su diferencia  $q = x - y$

¿Cuál es la incertidumbre,  $\xi_q$ ?

El error absoluto de la suma y de la diferencia de dos o más magnitudes es la suma de los errores absolutos de dichas magnitudes:

$$q = x \pm y \Rightarrow \xi_q \approx \xi_x + \xi_y$$

# Propagación de errores



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

20 Teoría de Errores

## Ejemplo:

En un experimento se introducen dos líquidos en un matraz y se quiere hallar la masa total del líquido. Se conocen:

$$M_1 = \text{Masa del matraz 1} + \text{contenido} = 540 \pm 10g$$

$$m_1 = \text{Masa del matraz 1} = 72 \pm 1g$$

$$M_2 = \text{Masa del matraz 2} + \text{contenido} = 940 \pm 20g$$

$$m_2 = \text{Masa del matraz 2} = 97 \pm 1g$$

La masa de líquido será:

$$M = (M_1 - m_1) + (M_2 - m_2) = 1311g$$

Su error:

$$\xi_M = \xi_{M_1} + \xi_{m_1} + \xi_{M_2} + \xi_{m_2} = 32g$$

El resultado se expresará:

$$M = 1311 \pm 32g$$

31



## Propagación de errores en productos y cocientes

Datos iniciales:

$$x \pm \xi_x = x \left( 1 \pm \frac{\xi_x}{|x|} \right) \quad y \pm \xi_y = y \left( 1 \pm \frac{\xi_y}{|y|} \right)$$

Sea su producto  $q = xy$  y su cociente  $q = x/y$

¿Cuál es la incertidumbre,  $\xi_q$ ?

El error relativo del producto y el cociente es igual a la suma de los errores relativos de dichas magnitudes:

$$q = xy \Rightarrow \frac{\xi_q}{|q|} \approx \frac{\xi_x}{|x|} + \frac{\xi_y}{|y|}$$

$$q = x/y \Rightarrow \frac{\xi_q}{|q|} \approx \frac{\xi_x}{|x|} + \frac{\xi_y}{|y|}$$

### Ejemplo:

Para medir la altura de un árbol  $L$ , se mide la longitud de su sombra  $L_1$ , la altura de un objeto de referencia  $L_2$ , y la longitud de su sombra  $L_3$ . Por semejanza:

$$L = L_1 \cdot \frac{L_2}{L_3}$$

Realizadas las medidas resultan:

$$L_1 = 200 \pm 2cm, \quad L_2 = 100.0 \pm 0.4cm \quad L_3 = 10 \pm 0.2cm$$

Por tanto

$$L = 200 \cdot \frac{100}{10} = 2000cm$$

su error será

$$\frac{\xi_L}{|L|} \approx \frac{\xi_{L_1}}{|L_1|} + \frac{\xi_{L_2}}{|L_2|} + \frac{\xi_{L_3}}{|L_3|} = \frac{2}{200} + \frac{0.4}{100} + \frac{0.2}{10}$$

$$= (1 + 0.4 + 2)\% = 3.4\% \rightarrow \xi_L = \frac{3.4}{100} 2000 = 68$$

$$L = 2000 \pm 68cm$$

# Propagación de errores



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

23 Teoría de Errores

## Error en función de una variable

Datos iniciales:  $x \pm \xi_x$ . Sea  $q = f(x)$  una función cualquiera.

¿Cuál es la incertidumbre,  $\xi_q$  ?

$$\xi_q = f(x + \xi_x) - f(x) \approx \frac{df(x)}{dx} \xi_x$$

Si  $x$  se mide con un error  $\xi_x$  y se utiliza para calcular  $q = f(x)$ , el error absoluto de  $q$  viene dado por:

$$\xi_q = \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \xi_x$$

# Ejemplo



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

24 Teoría de Errores

Hallar el error absoluto y relativo que se comete al elevar a la cuarta el número  $x = 2$  cuyo error absoluto es 0.1.

**Solución:**

$$x = 2, \quad \xi_x = 0.1$$

$$y = x^4, \quad \xi_y \approx \left| \frac{dy}{dx} \right| \xi_x$$

$$\xi_y \approx 4x^3 \xi_x$$

$$\xi_y \approx 4(2)^3(0.1)$$

$$\xi_y \approx 3.2$$

$$y = 2^4 = 16 \text{ Aproximado}$$

$$Y = y \pm \xi_y = 16 \pm 3.2 \text{ Exacto}$$

$$Y \in [12.8, 19.2] \text{ Rango}$$

$$\delta_y = \frac{3.2}{16} = 0.2$$

# Propagación de errores



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

25 Teoría de Errores

## Error en función de varias variables

Las reglas para el cálculo de errores que hemos visto se pueden deducir de una fórmula más general que nos permite resolver casos más complicados.

Sean las medidas  $x$  e  $y$  con errores  $\xi_x$  y  $\xi_y$  usadas para calcular:

$$q = f(x, y)$$

Mediante un desarrollo en serie para el caso de varias variables:

$$f(x + \xi_x, y + \xi_y) = f(x, y) + \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \xi_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \xi_y + \dots$$

con lo que:

$$\xi_q = f(x + \xi_x, y + \xi_y) - f(x, y) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \xi_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \xi_y$$

# Ejemplo



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

26 Teoría de Errores

La corriente pasa a través de una resistencia  $R = 20\Omega$  cuya precisión está dentro del 5%, la corriente es de 2 Amp. medida con una aproximación de  $\pm 0.1$  Amp. Si  $E = IR$ . Hallar el error absoluto y relativo.

## Solución:

Sabemos que  $E = IR$

Sea  $\xi_E$ ,  $\xi_I$ ,  $\xi_R$  los errores absolutos.

Propagación de Errores:

$$\xi_E \approx \left| \frac{\partial E}{\partial I} \right| \xi_I + \left| \frac{\partial E}{\partial R} \right| \xi_R$$

$$\xi_E \approx R\xi_I + I\xi_R$$



Además:

$$\xi_I = 0.1 \text{ Amp.}$$

$$\xi_R = 5\%(20) = 1\Omega$$

Reemplazando:

$$\xi_E = 20(0.1) + 2(1) = 4 \text{ voltios}$$

$$e = i * r = 2(20) = 40 \text{ Aproximado}$$

$$E = 40 \pm 4 \text{ Exacto}$$

$$\delta_e = \frac{\xi_e}{|E|} \approx \frac{4}{40} = 0.1$$

# Ejemplo



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

28 Teoría de Errores

Se tiene un rectángulo cuyos lados han sido medidos aproximadamente en:

$$l = 3 \text{ metros}$$

$$h = 2 \text{ metros}$$

¿Cuál es el error permisible con que deben ser medidos  $l$  y  $h$ , si se desea obtener el área del rectángulo con un error no mayor al 5%?

# Solución:

$$A = l * h$$

$$\xi_A = 5\%(6) = 0.3$$

$$A = 6 \pm 0.3$$

Propagación de Errores:

$$\xi_A = \left| \frac{\partial A}{\partial l} \right| \xi_l + \left| \frac{\partial A}{\partial h} \right| \xi_h$$

$$\xi_A = h * \xi_l + l * \xi_h = 0.3$$

$$\xi_A = (2)\xi_l + (3)\xi_h = 0.3$$

Ahora que hacemos??

## Principio de Igual Efecto

Suponemos que cada variable aporta al error en una misma cantidad.

$$\xi_l = \frac{0.3}{2 * 2} = 0.075 \quad \xi_h = \frac{0.3}{2 * 3} = 0.05$$



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

29 Teoría de Errores

# Ejercicio



Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

30 Teoría de Errores

El doblado de láminas metálicas es una operación muy común en un taller mecánico. La deformación de una lámina durante el doblado esta dada por:

$$e = \frac{1}{\left(\frac{2R}{T}\right) + 1}$$

Donde  $R$  es el radio de dobléz y  $T$  es el espesor de la lámina. Una lamina de aleación de aluminio de espesor 2 mm. fue doblada con un radio de dobléz de 12 mm, si se desea obtener la deformación con un error no mayor al 5%, ¿qué error en las medidas de  $R$  y  $T$  son permisibles?

# Bibliografía





Teoría de Errores

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

31 Teoría de Errores

-  Richard L. Burden and J. Douglas Faires  
Análisis numérico, 7a ed.
-  Steven C. Chapra and Raymond P. Canale  
Métodos numéricos para ingenieros, 5a ed.