Spline

INTRODUCCIÓN

Un *spline* es una función polinomial definida por casos

$$S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde cada caso es un polinomio

$$S_i : \ [n_i, n_{i+1}\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$$

y $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ con lo cual queda definido de la siguiente manera:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{si} \quad x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) & \text{si} \quad x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & \text{si} \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

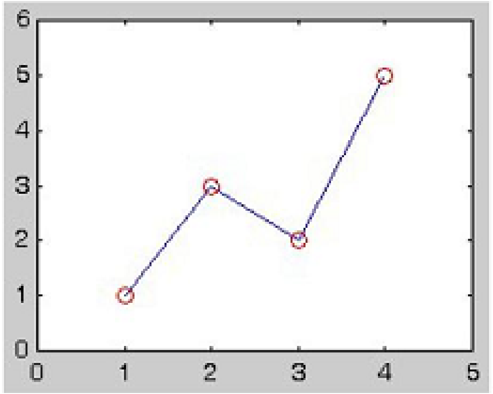
Spline Lineal

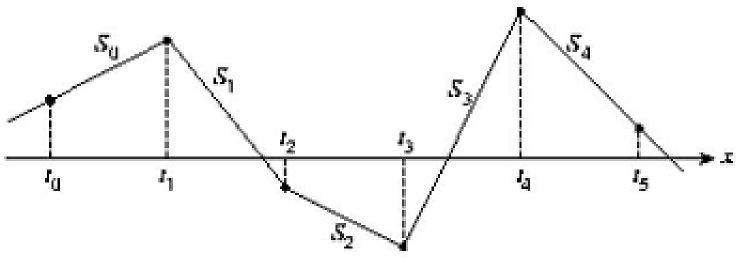
Definición

Una función $S(x)$ es un spline de grado 1 si:

1. *El dominio de $S(x)$ es un intervalo de $[a, b]$*
2. *$S(x)$ es continua en $[a, b]$*
3. *Hay puntos (los nodos de S) $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tal que $S(x)$ es lineal en cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$.*

Dados los $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, una función spline de grado 1 que interpole los datos es simplemente unir cada uno de los puntos mediante segmentos de recta, como se ilustra en las siguientes figuras





Spline de grado 1 con 6 puntos

Por lo tanto, el spline de grado 1 queda definido como:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) & \text{si} \quad x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = y_1 + f[x_1, x_2](x - x_1) & \text{si} \quad x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = y_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n](x - x_{n-1}) & \text{si} \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Ejemplo

Determine el spline lineal que interpola una tabla con los siguiente datos:

x	1	2	5	7
y	1	2	3	2,5

SOLUCIÓN:

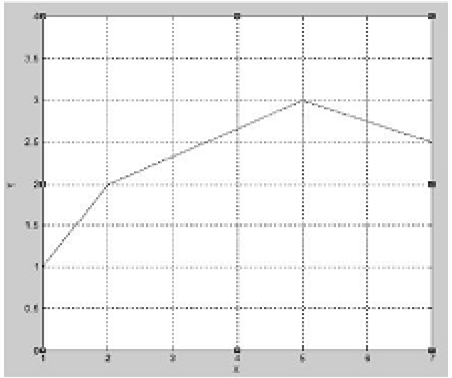
De acuerdo con la definición:

$$S_0(x) = 1 + \frac{2-1}{2-1}(x-1) = x;\ \ x \in [1,2]$$

$$S_1(x) = 2 + \frac{3-2}{5-2}(x-2) = \frac{1}{3}(x+4);\ \ x \in [2,5]$$

$$S_2(x) = 3 + \frac{2{,}5-3}{7-5}(x-5)$$

$$= -\frac{1}{4}(x-17);\ \ x \in [5,7]$$



SPLINE CÚBICO

Definición (Spline Cúbico)

Una función $S(x)$ es un spline de grado 3 (Spline Cúbico) si:

1. *El dominio de $S(x)$ es un intervalo de $[a, b]$*
2. *$S(x)$ es continua en $[a, b]$*
3. *$S'(x)$ es continua en $[a, b]$*
4. *$S''(x)$ es continua en $[a, b]$*
5. *Hay puntos (los nodos de S) $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tal que $S(x)$ es cúbico en cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$.*

Construcción de la función Spline Cúbica

Consideremos $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ cuyas abscisas están ordenadas de manera creciente
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (nodos).
La función $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es un spline cúbico si existen n polinomios $S_k(x)$, cada uno definido sobre un intervalo, los cuales lo podemos escribir en la forma:

$$S_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$$

para $x \in [x_k, x_{k+1}]$ y $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ verificando las siguientes propiedades:

1. $S(x_k) = y_k$ donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ (condición de interpolación).
2. $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-3, n-2$ (Continuidad de los splines)
3. $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$ donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-3, n-2$ (Continuidad de la derivada)
4. $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$ donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-3, n-2$ (Continuidad de la segunda derivada)
5. Una de las siguientes condicione de frontera se satisface

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \ \text{ frontera libre o natural}$$

$$S'(x_0) = f'(x_0) \text{ y } S'(x_n) = f'(x_n) \ \text{ frontera sujeta}$$

Si se satisface la condición de frontera libre o natural, se denomina spline cúbico natural.

Implementación de los Spline Cúbicos

Los coeficientes a_k, b_k, c_k y d_k son dados por las fórmulas

$$a_k = \frac{g_{k+1} - g_k}{6h_k}$$

$$b_k = \frac{g_k}{2}$$

$$c_k = f[x_k, x_{k+1}] - \frac{2h_k g_k + g_{k+1} h_k}{6}$$

$$d_k = f(x_k)$$

donde $h_k = x_{k+1} - x_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ los valores de g_k son obtenidos de la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$\mathbf{Mg=b} \Rightarrow$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n+1)}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = 6\begin{bmatrix} f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1] \\ f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-1},x_n] - f[x_{n-2},x_{n-1}] \end{bmatrix}$$

Spline de frontera libre o natural

Haciendo $g_0 = g_n = 0$ (Spline cúbico natural), se reduce al siguiente sistema tridiagonal $\widetilde{\mathbf{M}}\,.\widetilde{\mathbf{g}} = \mathbf{b}$

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix}$$

SPLINE DE FRONTERA SUJETA

$S_0'(x_0) = A$ y $S_n'(x_n) = B$, con lo cual se agregan dos ecuaciones

$$2h_0 g_0 + h_0 g_1 = 6(f[x_0, x_1] - A)$$

$$h_{n-1} g_{n-1} + 2h_{n-1} g_n = 6(B - f[x_{n-1}, x_n])$$

Se tiene el siguiente sistema matricial

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = 6 \begin{bmatrix} f[x_0, x_1] - A \\ f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ B - f[x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix}$$

Ejemplo

*Obtener una interpolación por **Spline Cúbico Natural** para el polinomio $p(x) = x^4$, para $x = 0, 1, 2, 3$. Muestre el spline $S(x)$ para cada intervalo.*

SOLUCIÓN:

$$x_0 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3$$
$$f(x_0) = 0;\ f(x_1) = 1;\ f(x_2) = 16;\ f(x_3) = 81$$
$$h_0 = x_1 - x_0 = 1;\ h_1 = x_2 - x_1 = 1;\ h_2 = x_3 - x_2 = 1$$
$$f[x_0, x_1] = 1;\ f[x_1, x_2] = 15;\ f[x_2, x_3] = 65$$
$$g_0 = 0;\ g_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ll} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \end{array}\right] = 6 \left[\begin{array}{c} f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2] \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 14 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Luego:

$g_1 = 2{,}4;\ g_2 = 74{,}4$

Hallando los coeficientes de $S_0(x)$

$a_0 = \dfrac{g_1 - g_0}{6h_0} = 0{,}4$

$b_0 = \dfrac{g_0}{2} = 0$

$c_0 = f[x_0, x_1] - \dfrac{2h_0 g_0 + g_1 h_0}{6} = 0{,}6$

$d_0 = f(x_0) = 0$

$$S_0(x) = 0{,}4(x-0)^3 + 0(x-0)^2 + 0{,}6(x-0) + 0 \quad x \in [0,1]$$

Hallando los coeficientes de $S_1(x)$

$a_1 = \dfrac{g_2 - g_1}{6h_1} = 12$

$b_1 = \dfrac{g_1}{2} = 1{,}2$

$c_1 = f[x_1, x_2] - \dfrac{2h_1g_1 + g_2h_1}{6} = 1{,}8$

$d_1 = f(x_1) = 1$

$$S_1(x) = 12(x-1)^3 + 1{,}2(x-1)^2 + 1{,}8(x-1) + 1 \quad x \in [1,2]$$

Hallando los coeficientes de $S_2(x)$

$$a_2 = \frac{g_3 - g_2}{6h_2} = -12{,}4$$

$$b_2 = \frac{g_2}{2} = 37{,}2$$

$$c_2 = f[x_2, x_3] - \frac{2h_2g_2 + g_3h_2}{6} = 40{,}2$$

$$d_2 = f(x_2) = 16$$

$$S_2(x) = -12{,}4(x-2)^3 + 37{,}2(x-2)^2 + 40{,}2(x-2) + 16 \quad x \in [2,3]$$

Finalmente:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 0{,}4(x-0)^3 + 0(x-0)^2 + 0{,}6(x-0) + 0 \quad x \in [0,1] \\ S_1(x) = 12(x-1)^3 + 1{,}2(x-1)^2 + 1{,}8(x-1) + 1 \quad x \in [1,2] \\ S_2(x) = -12{,}4(x-2)^3 + 37{,}2(x-2)^2 + 40{,}2(x-2) + 16 \quad x \in [2,3] \end{cases}$$

Ejemplo

A partir de la función $f(x) = 3xe^{x} - e^{2x}$ se han tabulado los siguientes puntos:

x	f(x)
1.00	0.76578938644649
1.02	0.79536677885175
1.04	0.82268817048051
1.06	0.84752225818442

a) Obtener el spline cúbico natural tomando toda la información de esta tabla.

b) Estime f(1.01) y f'(1.02) haciendo uso del spline obtenido en a) y muestre los errores correspondientes.

c) Comente sus resultados.

a)

i	hi	x	F(x)	f[,]
0	0.02	1.00	0.76578938644649	1.47886962026340
1	0.02	1.02	0.79536677885175	1.36606958143797
2	0.02	1.04	0.82268817048051	1.24170438519515
		1.06	0.84752225818442	

En este caso:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} f[x_1x_2]-f[x_0x_1] \\ f[x_2x_3]-f[x_1x_2] \end{bmatrix}$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} 0.08 & 0.02 \\ 0.02 & 0.08 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.67680023295260 \\ -0.74619117745689 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = -6.53669918117836 \quad M_2 = -7.69321492291652 \quad M_0 = M_3 = 0$$

$$S(x) = \begin{cases} x \in [1.00, \ \ 1.02] & -54.47(x-1.00)^3 + 0(x-1.00)^2 + 1.50(x-1.00) + 0.77 \\ x \in [1.02, \ \ 1.04] & -9.64(x-1.02)^3 - 3.27(x-1.02)^2 + 1.44(x-1.02) + 0.795 \\ x \in [1.04, \ \ 1.06] & 64.11(x-1.04)^3 - 3.85(x-1.04)^2 + 1.29(x-1.04) + 0.82 \end{cases}$$

b)

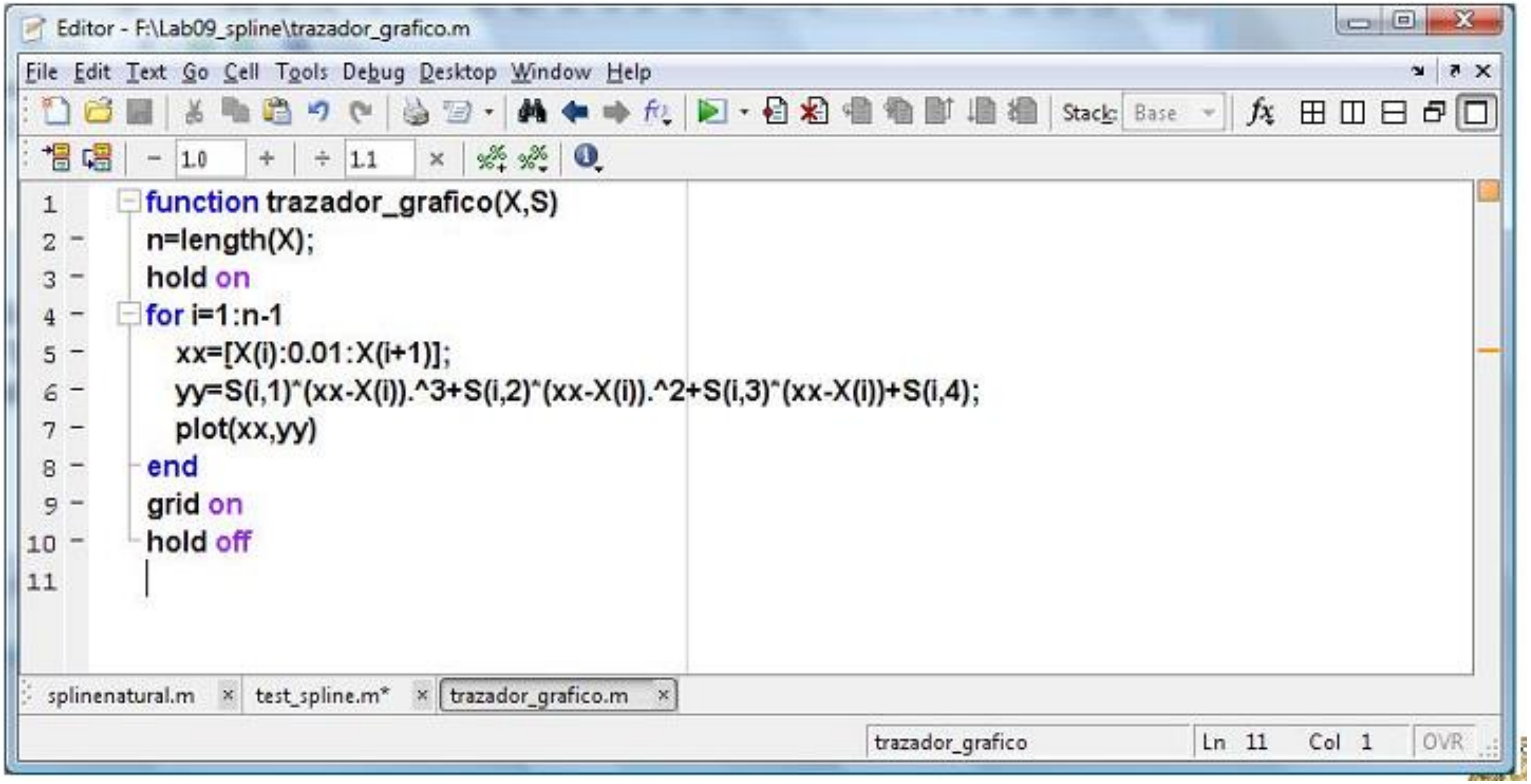
S(1.01) = 0.780742
f(1.01) = 0.780846
err = 0.000104

S'(1.02) = 1.435292
f'(1.02) = 1.424342
err = 0.010950

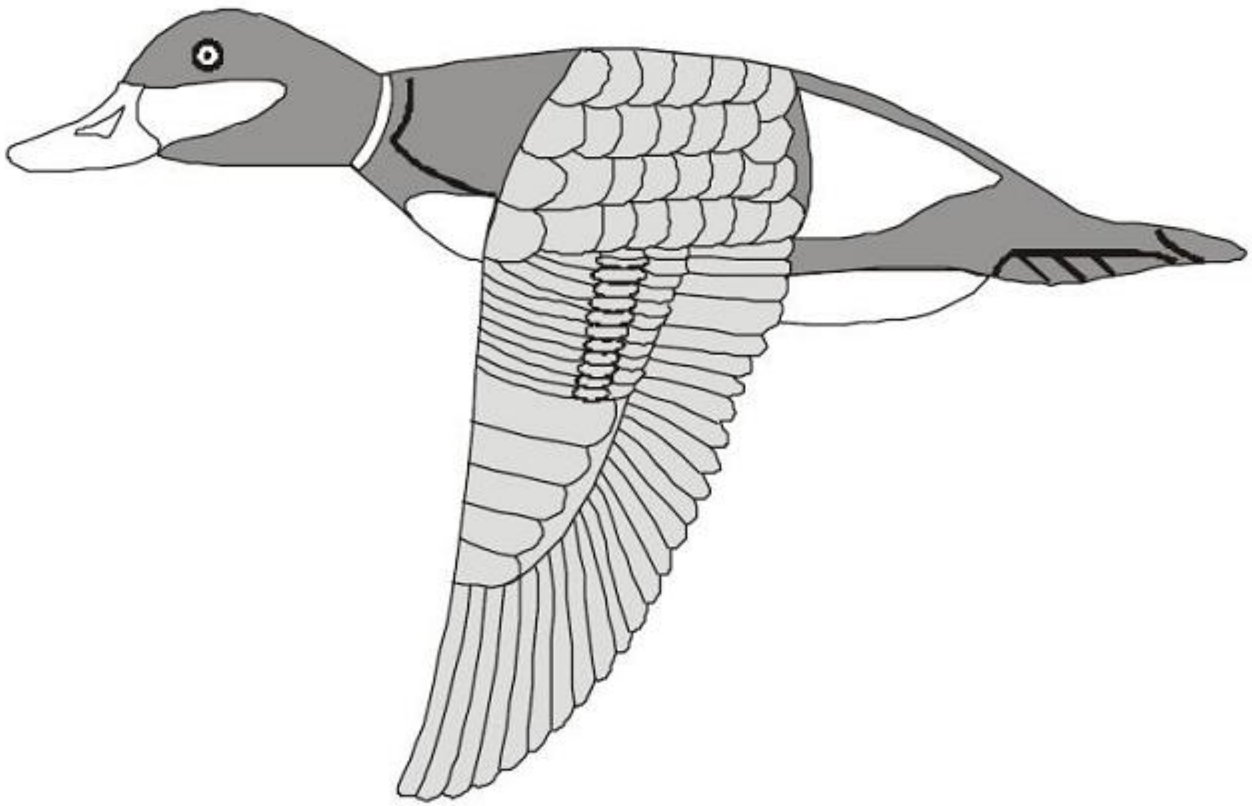
c)

La precisión obtenido es bastante buena para aproximacion de la función mas no asi para el calculo de la derivada.

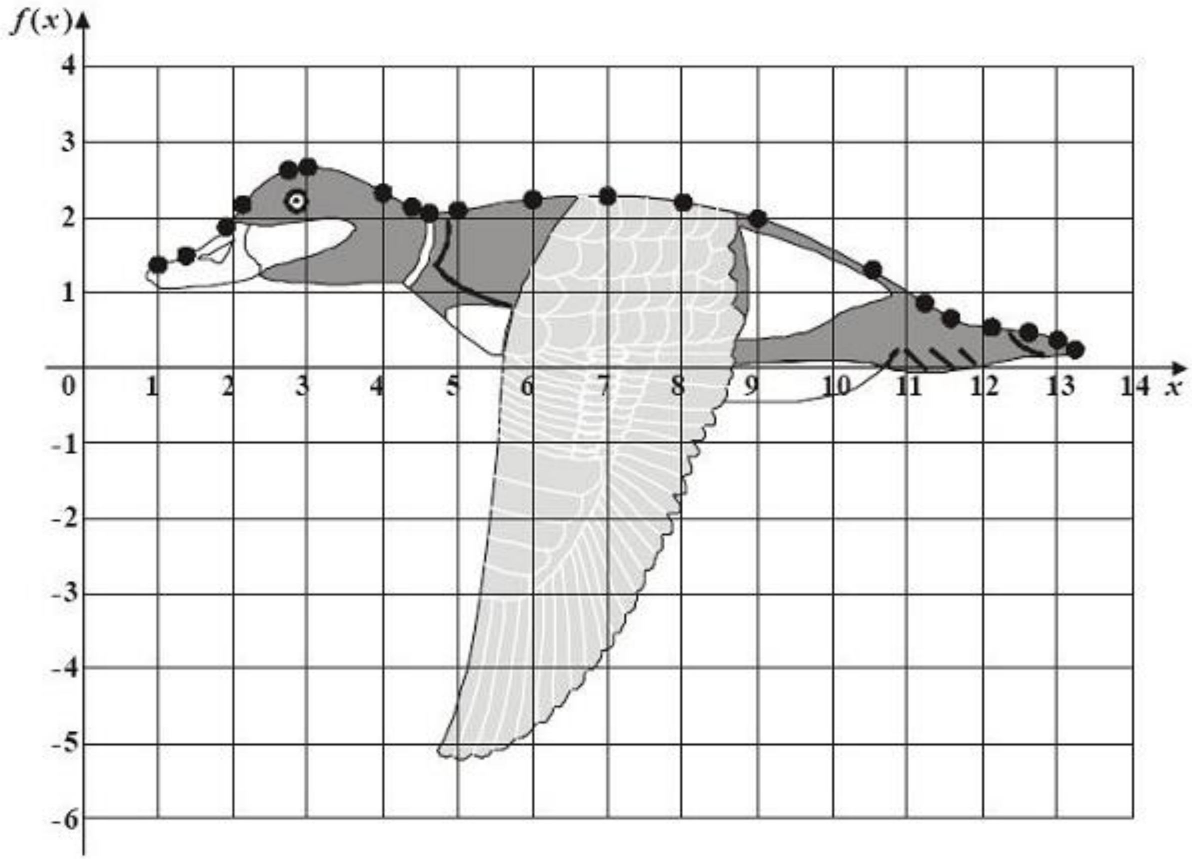
```
function S=splinenatural(X,Y)
%Este programa calcula los coeficientes del spline
%cubico, que interpola los nodos (X,Y)
%y tienen derivadas segunda en los extremos nulas
%(spline natural)
N=length(X)-1;
H=diff(X);
E=diff(Y)./H;
diagsupinf=H(2:N-1);
diagprinc=2*(H(1:N-1)+H(2:N));

g0=0;gn=0; %Restriccion del spline natural
A=diag(diagprinc)+diag(diagsupinf,1)+diag(diagsupinf,-1);
b=6*diff(E');

g=A\b;
g=[g0,g',gn];
for i=1:N
   S(i,1)=(g(i+1)-g(i))/(6*H(i));
   S(i,2)=g(i)/2;
   S(i,3)=E(i)-H(i)*(g(i+1)+2*g(i))/6;
   S(i,4)=Y(i);
end
```


Editor - F:\Lab09_spline\trazador_grafico.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
function trazador_grafico(X,S)
n=length(X);
hold on
for i=1:n-1
xx=[X(i):0.01:X(i+1)];
yy=S(i,1)*(xx-X(i)).^3+S(i,2)*(xx-X(i)).^2+S(i,3)*(xx-X(i))+S(i,4);
plot(xx,yy)
end
grid on
hold off
splinenatural.m
test_spline.m*
trazador_grafico.m
trazador_grafico
Ln 11
Col 1
OVR

Aplicación



APLICACIÓN

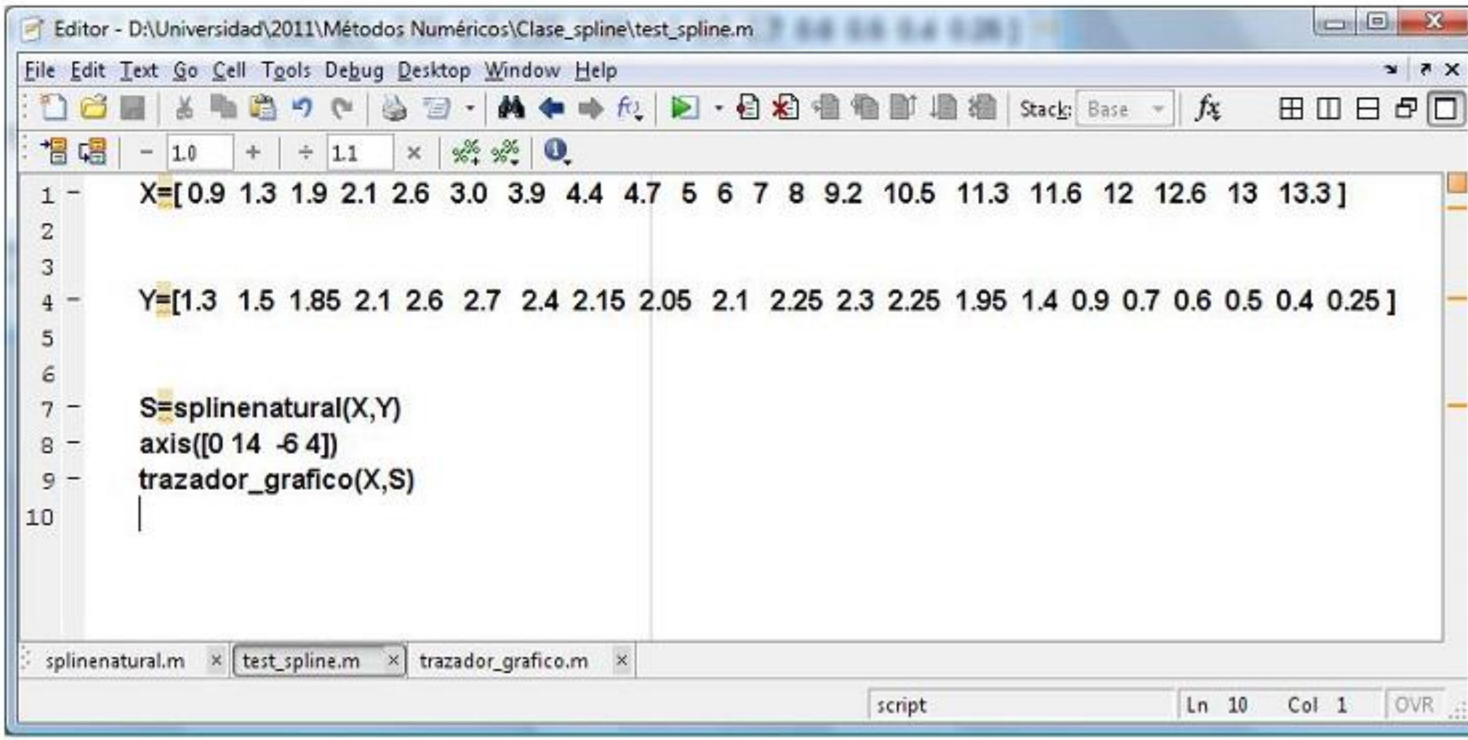


Aplicación

x	0,9	1,3	1,9	2,1	2,6	3,0	3,9	4,4	4,7	5,0	6,0
$f(x)$	1,3	1,5	1,85	2,1	2,6	2,7	2,4	2,15	2,05	2,1	2,25

x	7,0	8,0	9,2	10,5	11,3	11,6	12,0	12,6	13,0	13,3
$f(x)$	2,3	2,25	1,95	1,4	0,9	0,7	0,6	0,5	0,4	0,25

APLICACIÓN


Editor - D:\Universidad\2011\Métodos Numéricos\Clase_spline\test_spline.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
1.0
1.1
X=[0.9 1.3 1.9 2.1 2.6 3.0 3.9 4.4 4.7 5 6 7 8 9.2 10.5 11.3 11.6 12 12.6 13 13.3]
Y=[1.3 1.5 1.85 2.1 2.6 2.7 2.4 2.15 2.05 2.1 2.25 2.3 2.25 1.95 1.4 0.9 0.7 0.6 0.5 0.4 0.25]
S=splinenatural(X,Y)
axis([0 14 -6 4])
trazador_grafico(X,S)
splinenatural.m
test_spline.m
trazador_grafico.m
script
Ln 10
Col 1
OVR

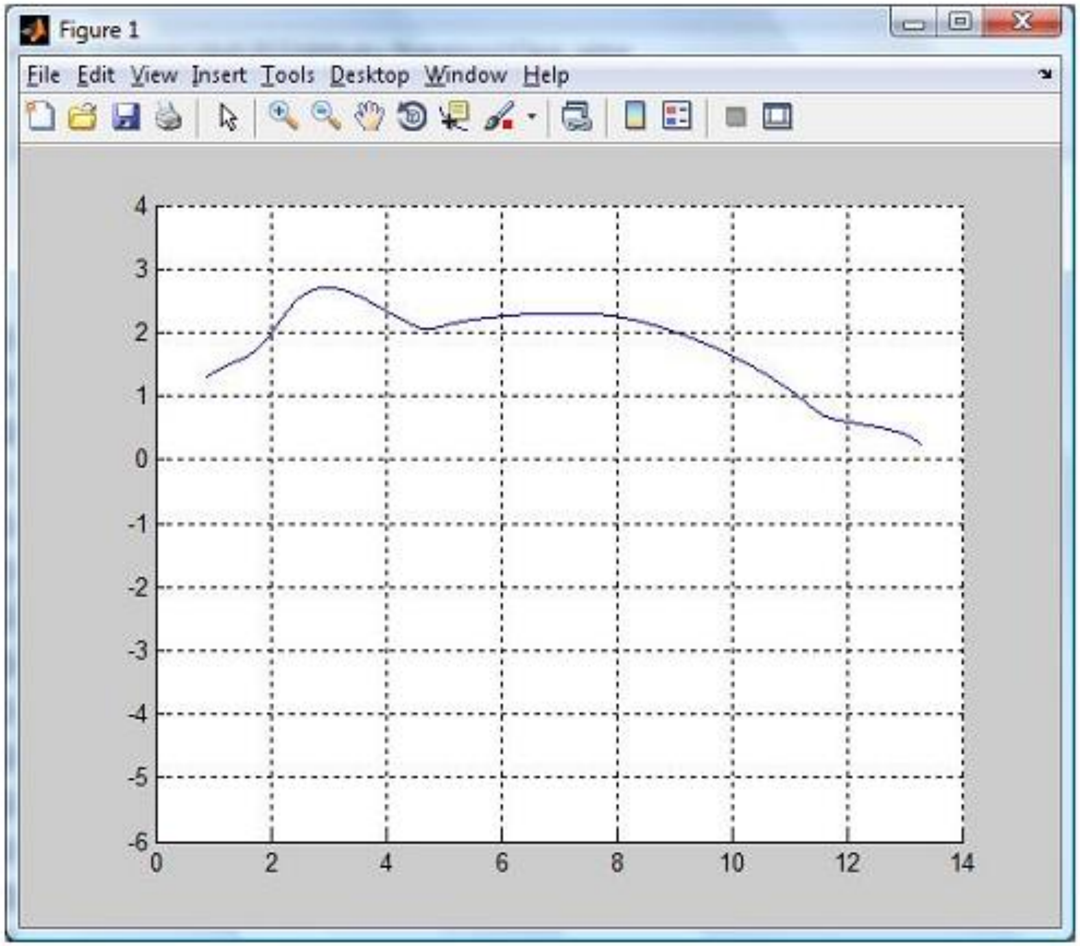


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
0
2
4
6
8
10
12
14