UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE INGENIERIA INDUSTRIAL

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN SUSTITUTORIO DE MATEMATICA II

Consideraciones generales:

- No está permitido ningún material de consulta ni el uso de calculadora.
- Solo se permite formulario básico.

1. Si $w = f(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-y}{yz})$, hallar

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z}$$

Solución:
$u = \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$
$v = \frac{z-y}{yz} = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$
$w = f(u,v);\ u = f_1(x,y);\ v = f_2(y,z)$

$$\begin{array}{rcllcl}
\frac{\partial w}{\partial x} & = & \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & & = & \frac{\partial w}{\partial u}(-\frac{1}{x^2}) \\
\frac{\partial w}{\partial y} & = & \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} & + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} & = & \frac{\partial w}{\partial u}(\frac{1}{y^2}) + \frac{\partial w}{\partial v}(-\frac{1}{y^2}) \\
\frac{\partial w}{\partial z} & = & \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} & & = & \frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{z^2}
\end{array}$$

$$x^2\frac{\partial w}{\partial u}(-\frac{1}{x^2}) + y^2(\frac{\partial w}{\partial u}(\frac{1}{y^2}) + \frac{\partial w}{\partial v}(-\frac{1}{y^2})) + z^2(\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{z^2}) = 0$$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) ¿f es diferenciable en $(0,0)$?. Justificar.
   b) ¿Sus derivadas parciales de primer orden son continuas?. Justificar.

Solución:
Analizando la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$

$$\begin{aligned}
D_1 f(0,0) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta x)^2\cos\left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)}{\Delta x} = 0
\end{aligned}$$

Analogamente: $D_2 f(0,0) = 0$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f(0,0) - D_1 f(0,0)\Delta x - D_2 f(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cos\left(\frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) = 0$$

Por lo tanto:

$\boxed{f \text{ es diferenciable en } (0,0)}$

$$D_1 f(x,y) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2x}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$D_2 f(x,y) = \begin{cases} 2y\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{2x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2x}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right\}$$

$\boxed{S : \{(x,y)\ /\ y = x\ \}}$

$$\lim_{x\to 0} \left\{2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2x}{2x^2}\sin\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right\}$$

$$0 + \lim_{x\to 0} \left\{\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right\} = \lim_{x\to 0} \left\{\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right\}$$

$\boxed{\text{Este límite no existe}}$

Es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{2x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2x}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right\}$$

Este límite no existe

Luego:

$$D_1 f(x,y) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2x}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$D_1 f(x,y)$ No es continua en $(0,0)$

Análogamente:

$D_2 f(x,y)$ No es continua en $(0,0)$

3. Una partícula está situada en el punto $(-2, 1)$ de una placa metálica cuya temperatura viene dada por

$$T(x, y) = 20 - 2x^2 - y^2$$

Midiéndose x e y en pulgadas y T en grados Celcius.

   a) ¿En qué dirección crece la temperatura más rapidamente?

   b) ¿A qué ritmo se produce este crecimiento?

   Solución:
   (a)
   $T(x, y) = 20 - 2x^2 - y^2; \quad (-2, 1)$
   $\nabla T(x, y) = (-4x, -2y)$
   $\nabla(-2, 1) = (8, -2)$
   (b)
   $||\nabla(-2, 1)|| = \sqrt{68}$ por pulgada.

4. Determinar los extremos relativos de $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + 3z^2$ sujeto a $x + 2y + 4z = 60$.
   Solución:
   $g(x, y, z) = x + 2y + 4z - 60$

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \Rightarrow (2x + y, x + 2y, 6z) = \lambda(1, 2, 4)$$

$$\begin{array}{lcl} 2x + y & = & \lambda \\ x + 2y & = & 2\lambda \\ 6z & = & 4\lambda \end{array}$$

   $y = \lambda;\ x = 0;\ z = \dfrac{2\lambda}{3}$
   Reemplazando en $x + 2y + 4z = 60$
   Punto Critico: $\left(0, \dfrac{90}{7}, \dfrac{60}{7}\right)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   $\Delta_{11} = 2 > 0$

   $\Delta_{22} = 3 > 0$

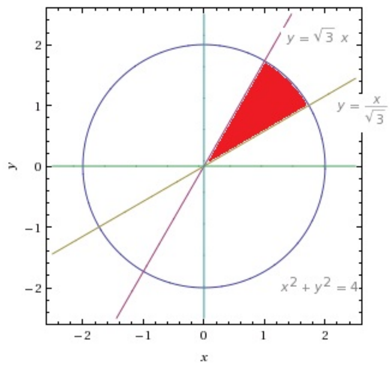
   $\Delta_{33} = 18 > 0$
   Por lo tanto:

$$\left(0, \frac{90}{7}, \frac{60}{7}\right) \quad \boxed{\text{Minimo Relativo}}$$

5. Calcular la integral doble

$$\int\int_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dA$$

donde R es la región limitada por $x^2+y^2 \leq 4$ y las rectas $y = \sqrt{3}x$ y $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ en el primer cuadrante.
Solución:



Por coordenadas polares:
$x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta$
$0 \leq r \leq 2$
$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\theta}{3}$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^2 \arctan\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) r dr d\theta$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^2 \arctan(\tan\theta) r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^2 \theta r dr d\theta = \frac{\pi^2}{12}$$

Los Profesores