UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE INGENIERIA INDUSTRIAL

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE METODOS COMPUTACIONALES

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4 Y CALCULADORA**
- **NO SE PERMITE EL INTERCAMBIO DE HOJA DE FORMULARIO.**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS CON LETRA LEGIBLE, ESCRIBA CON LAPICERO AZUL O NEGRO.**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS.**

Pregunta 1 (4Pts)

Disponemos de los siguientes datos sacados de un polinomio de grado $g \leq 5$.

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	-5	1	1	1	7	25

a. ¿Podríamos averiguar de qué grado es?. Justifique su respuesta. (2Ptos)
b. Interpolar para x= -0.5 y hallar su error cometido. (2Pts)

Solución:

(a)

-2	-5	6	-3	1	0	0
-1	1	0	0	1	0	
0	1	0	3	1		
1	1	6	6			
2	7	18				
3	25					

$$p(x) = -5 + 6(x+2) - 3(x+2)(x+1) + 1(x+2)(x+1)x$$
$$p(x) = x^3 - x + 1$$

p(x) es de grado 3.

(b) Consideramos polinomio de grado 2 para obtener el error cometido

$$p(x) = -5 + 6(x+2) - 3(x+2)(x+1) \rightarrow p(-0.5) = 1.75$$
$$e(-0.5) = \left|1(x+2)(x+1)x\right| = \left|(1.5)(0.5)(-0.5)\right| = 0.375$$

Pregunta 2 (5 Pts)

Dada la ecuación $x^3 + x - 10 = 0$

a. Demuestre que la formulación

$$x = \sqrt[3]{10 - x}$$

es adecuada para resolver la ecuación mediante iteración del punto fijo (Existencia y Unicidad) para todo valor inicial p_0 en el intervalo [1.25,2.5]. (3Pts)

b. Cuántas iteraciones son necesarias para determinar $|p_n - p| < 10^{-4}$, siendo p la raíz exacta? (2Pts)

Solución:

(a)

$$x = \sqrt[3]{10 - x} \rightarrow g(x) = \sqrt[3]{10 - x}$$

La función de punto fijo g(x) cumple las condiciones de existencia y unicidad.

En efecto:

Iniciamos nuestro análisis con la primera derivada

$g'(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(10-x)^2}} < 0; \quad \forall x \in [1.25, 2.5]$. Luego g(x) es decreciente.

$$g(1.25) = 2.0606$$
$$g(2.5) = 1.9574$$
$$g([1.25, 2.5]) = [1.9574, 2.0606] \subset [1.25, 2.5]$$

Se comprueba la existencia del punto fijo.

$$g''(x) = \frac{-2}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(10-x)^5}} < 0$$

El valor máximo de $|g'(x)|$ es $|g'(2.5)| = 0.087 < 1$

Se comprueba la unicidad del punto fijo.

(b) $k = \max|g'(x)| = 0.087$, eligiendo un p_0 inicial, p_0=2.5

$$|p_n - p| < \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|$$

$$|p_n - p| < \frac{0.087^n}{1 - 0.087}|1.9574 - 2.5| < 10^{-4}$$

Eso, con p_0=2.5, tenemos n >3.5588

Se necesita como mínimo 4 iteraciones.

Pregunta 3 (3 Pts)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$.

Queremos resolver el sistema **Ax=b** iterativamente mediante la fórmula

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(n)} + \mathbf{b}$$

a. Para qué valores de a podemos asegurar que el método converge?. (1.5Pts)
b. Establecer la relación que existe entre los valores propios de la matriz de iteración de éste método con la matriz de iteración Gauss Seidel. (1.5Pts)

Solución:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

$$x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} x^{(n)} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mathrm{b}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(T) = a^2 < 1 \Rightarrow -1 < a < 1$$

(b) Se trata del método de Gauss – Seidel, es decir valores propios de la matriz de iteración de éste método con la matriz de iteración Gauss Seidel son los mismos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D - L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (D - L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(n+1)} = (D - L)^{-1} U x^{(n)} + (D - L)^{-1} \mathrm{b} = x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} x^{(n)} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mathrm{b}$$

Pregunta 4 (3 Pts)

Calcular, con una precisión de hasta 0.01, una raíz de la ecuación:

xsech(x) = 0.5.

Nota: $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$, $\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

Considere x_0=0.5.

Solución:

Utilizando el método de Newton:

$$x_0 = 0.5$$
$$f(x) = e^{x} + e^{-x} - 4x$$
$$f\,'(x) = e^{x} - e^{-x} - 4$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f\,'(x_0)} = 0.5 - \frac{-0.0566}{0.6819} = 0.583; \quad \textbf{error} = 0.083$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f\,'(x_1)} = 0.583 - \frac{-0.0038}{0.5908} = \mathbf{0.5893}; \quad \textbf{error} = 0.0064$$

Pregunta 5 (5 Pts)

Los lados de un triángulo miden 26, 28 y 34 cm. Se dibujan tres circunferencias con centro en cada vértice del triángulo, tangente entre sí dos a dos. Se desea encontrar los radios de cada circunferencia.

a. Presente el modelo matemático que resuelva el problema. (1Pto)
b. Resuelva el modelo usando eliminación Gaussiana.(2Pts)
c. Determinar si la convergencia está asegurada para el método de Gauss-Seidel. Justifique correctamente su respuesta. (2Pts)

Solución:

a. $$\begin{aligned} r_1 + r_3 &= 28 \\ r_1 + r_2 &= 26 \\ r_2 + r_3 &= 34 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 26 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

b. Eliminación Gaussiana

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 28 \\ 1 & 1 & 0 & 26 \\ 0 & 1 & 1 & 34 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 28 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 34 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 28 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 36 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$$

c.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{gs} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(T_{gs}) = 1$$

Por lo tanto no es convergente.

Los Profesores