UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE INGENIERIA INDUSTRIAL

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN FINAL DE MATEMATICA II

Consideraciones generales:

- No está permitido ningún material de consulta ni el uso de calculadora.
- Solo se permite formulario básico.

Nota: Elegir 5 de las 6 Preguntas

1. Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} 2x - y + 1, & x = 1 \text{ ó } y = 3 \\ -1, & x \neq 1 \text{ y } y \neq 3 \end{cases}$

   a) ¿Es f diferenciable en $(1,3)$?

   b) ¿Existe $D_1 f(1,3)$ y $D_2 f(1,3)$?. Si existe hallarlos.

   Solución:

   (a.) ¿f es continua en $(1,3)$?

   - $f(1,3) = 0$ existe
   - $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (-1) = -1$
   - $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (-1) = -1 \neq 0 = f(1,3)$

   Luego, f no es continua en $(1,3)$

   Por lo tanto f no es diferenciable.

   (b.)

$$\begin{aligned} D_1 f(1,3) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x, 3) - f(1,3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\{2(1+\Delta x) - 3 + 1\} - 0}{\Delta x} = 2 \\ D_2 f(1,3) &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(1, 3+\Delta y) - f(1,3)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\{2 - (3+\Delta y) + 1\} - 0}{\Delta y} = -1 \end{aligned}$$

2. Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) Hallar $D_{12} f(0,0)$ y $D_{21} f(0,0)$

   b) Determinar si f es diferenciable en $(0,0)$

Solución:

$D_1f(0,0)=0; \qquad D_2f(0,0)=0$

$$D_1f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$D_2f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$D_{12}f(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{D_1f(0,\Delta y)-D_1f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\dfrac{(\Delta y)^5}{\Delta y^4}-0}{\Delta y}=-1$$

$$D_{21}f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{D_2f(\Delta x,0)-D_2f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(\Delta x)^5}{\Delta x^4}-0}{\Delta x}=1$$

¿f es diferenciable en $(0,0)$?

Basta probar que el siguiente límite

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-D_1f(0,0)\Delta x-D_2f(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

Del límite:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y((\Delta x)^2-(\Delta y)^2)}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

Dado que:

$$\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}<1$$

entonces:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left|\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\leq\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left|\frac{\Delta x((\Delta x)^2-(\Delta y)^2)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right|$$

Por Sandwich:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left|\frac{\Delta x((\Delta x)^2-(\Delta y)^2)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right| \leq \lim_{(\Delta x\Delta y)\to(0,0)}\frac{|\Delta x|(|(\Delta x)^2|+|(\Delta y)^2|)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\\ &\leq \lim_{(\Delta x\Delta y)\to(0,0)}|\Delta x| \end{aligned}$$

Como: $\displaystyle\lim_{(\Delta x\Delta y)\to(0,0)}0=\lim_{(\Delta x\Delta y)\to(0,0)}|\Delta x|=0$

Se tiene:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y((\Delta x)^2-(\Delta y)^2)}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

Por lo tanto f es diferenciables en $(0,0)$.

3. Determinar los extremos relativos o punto silla de la función

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + xy + xz + yz + 4y + z - 3$$

Hallar el valor de f en esos puntos.
Solución:
$f_x(x,y,z) = 3x^2 + y + z = 0$
$f_y(x,y,z) = 2y + x + z + 4 = 0$
$f_z(x,y,z) = x + y + 1 = 0$
Solución: $x = 1,\ y = -2, \quad z = -1; \qquad (1,-2,-1)$ punto critico
$x = -1,\ y = 0; \quad z = -3; \qquad (-1,0,-3)$ punto critico
$f_{xx}(x,y,z) = 6x; \quad f_{xy}(x,y,z) = 1; \quad f_{xz}(x,y,z) = 1$
$f_{yx}(x,y,z) = 1; \quad f_{yy}(x,y,z) = 2; \quad f_{yz}(x,y,z) = 1$
$f_{zx}(x,y,z) = 1; \quad f_{zy}(x,y,z) = 2; \quad f_{zz}(x,y,z) = 0$

$$H(1,-2,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_{11} = 6 > 0; \quad \Delta_{22} = 11 > 0; \qquad \Delta_{33} = -6 < 0$ Punto de Silla
$f(1,-2,-1) = -8$

$$H(-1,0,-3) = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

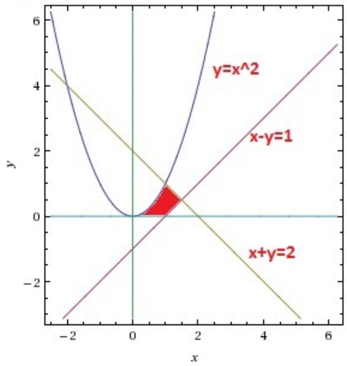
$\Delta_{11} = -6 < 0; \quad \Delta_{22} = -13 < 0; \qquad \Delta_{33} = 7 > 0$ Punto de Silla
$f(-1,0,3) = -4$

4. Calcule los extremos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$ condicionados por las ecuaciones
$g_1(x,y,z) = x - z - 1 = 0; \quad g_2(x,y,z) = y + z - 2 = 0$
Solución:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z)$$

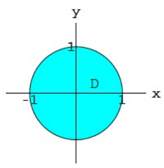
$(2x-2y, 2y-2x-2z, 2z-2y) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(0,1,1) = (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2)$
$2x - 2y = \lambda_1$
$2y - 2x - 2z = \lambda_2$
$2z - 2y = -\lambda_1 + \lambda_2$
Ademas
$x - z - 1 = 0$
$y + z - 2 = 0$
Resolviendo: $\lambda_1 = \dfrac{2}{7} \quad ; \lambda_2 = -\dfrac{10}{7}$
$x = \dfrac{11}{7}; \quad y = \dfrac{10}{7}; \qquad z = \dfrac{4}{7}$
Extremo Relativo: $(\dfrac{11}{7}, \dfrac{10}{7}, \dfrac{4}{7})$ y su valor es $f(\dfrac{11}{7}, \dfrac{10}{7}, \dfrac{4}{7}) = -\dfrac{63}{49}$

5. Calcular $\int\int_D 2dA$, donde
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq x^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y-2 \leq 0,\ x-y-1 \leq 0\}$
Solución:



$$\int\int_D 2dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} 2dydx + \int_1^{\frac{3}{2}} \int_{x-1}^{2-x} 2dydx$$
$$= \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (3-2x)dx = \frac{7}{6}$$

6. Calcular $\int\int_D (1+x^2+y^2)dA$, donde D es la región:



Solución:
Coordenadas Polares:
$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta$
$0 \leq \theta \leq 2\pi; \qquad 0 \leq r \leq 1$
$$\int\int_D (1+x^2+y^2)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(1+r^2)^2}{4}|_0^1 d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Los Profesores