**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

**FACULTAD DE INGENIERIA INDUSTRIAL**

# SOLUCIONARIO DEL EXAMEN FINAL DE METODOS COMPUTACIONALES

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4 Y CALCULADORA**
- **NO SE PERMITE EL INTERCAMBIO DE HOJA DE FORMULARIO.**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS CON LETRA LEGIBLE, ESCRIBA CON LAPICERO AZUL O NEGRO.**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 120 MINUTOS.**

## Pregunta 1 (4Pts)

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

a. (1Pto) El método de ajuste de datos, permite minimizar cada una de las distancias desde los puntos dados a la recta de ajuste.

**(F) Justificación:**

**Minimiza la suma de las distancias desde los puntos dados a la recta de ajuste.**

b. (1Pto) Los métodos cuantitativos para resolver ecuaciones diferenciales no pueden resolver ecuaciones diferenciales lineales de tercer orden.

**(F) Justificación:**

**Se pueden resolver haciendo un cambio de variable para luego convertirlo en un sistema de ecuaciones lineales**.

c. (1Pto) El error al aplicar el método de Simpson a la integral $\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} (x^3 + x^2 + \sqrt{2}x)dx$ es 0.0025.

**(F) Justificación:**

**Error=0; Método de Simpson es exacta para polinomios de grado menor o igual a 3.**

d. (1Pto) El PVI $\begin{cases} y' = y\,t \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ; tiene solución única en el intervalo [0,1]

**(V) Justificación:**

**Constante Lipschitziana L=1>0**

## Pregunta 2 (4 Pts)

Para analizar la productividad, se ha tomado una muestra de 50 empresas. Los datos observados son: el número de trabajadores y la cantidad facturada en un año. En el siguiente cuadro se presenta esta información:

| Número de Trabajadores | 5 | 15 | 20 | 30 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad Facturada | 4 | 10 | 15 | 20 | 40 |
| Número de empresas | 15 | 10 | 10 | 5 | 10 |

a. Determine una recta que ajuste estos datos.
b. Calcule el error que se comete para cada observación.
c. ¿Es esta recta un buen ajuste?. Justifique su respuesta.

**Solución:**

**(a)**

| Número de Trabajadores | 5 | 15 | 20 | 30 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad Facturada | 4 | 10 | 15 | 20 | 40 |

Y=0.5447 X +2.5494

**(b)**

| Ajuste | Cant.Facturada | Error cometido |
|---|---|---|
| 5.2727 | 4.0000 | 1.2727 |
| 10.7194 | 10.0000 | 0.7194 |
| 13.4427 | 15.0000 | 1.5573 |
| 18.8893 | 20.0000 | 1.1107 |
| 40.6759 | 40.0000 | 0.6759 |

**(c)**

R2= 0.9917 como se acerca R2 a 1, es un buen ajuste.

**Pregunta 3 (4 Pts)**

Determinar los coeficientes A, B y C de modo que la fórmula:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \underbrace{Af(0)+Bf\left(\frac{1}{2}\right)+Cf(1)}_{\text{fórmula}}$$

Sea exacta para polinomio de grado menor o igual a 2.

Con la fórmula obtenida aproximar la siguiente integral $\int_{-1}^{1} e^{t}\cos(t)dt$

**Solución:**

Exacta para polinomios de grado menor o igual a 2:

$$f(x)=1$$
$$f(x)=x$$
$$f(x)=x^2$$

$$\int_0^1 1dx = A.1+B.1+C.1=1$$
$$\int_0^1 xdx = A.0+B.\frac{1}{2}+C.1=\frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 x^2dx = A.0+B.\frac{1}{4}+C.1=\frac{1}{3}$$
$$A+B+C=1$$
$$B+2C=1$$
$$3B+12C=4$$
$$A=1/6;\quad B=2/3;\quad C=1/6$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}f(0)+\frac{2}{3}f(\frac{1}{2})+\frac{1}{6}f(1)$$

Cambio de variable:

$$t=2x-1$$
$$dt=2dx$$
$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\int_0^1 2f(2x-1)dx \Rightarrow$$
$$\int_{-1}^{1} e^{t}\cos(t)dt=\int_0^1 \underbrace{2e^{2x-1}\cos(2x-1)}_{F(x)}dx \approx \frac{1}{6}F(0)+\frac{2}{3}F(\frac{1}{2})+\frac{1}{6}F(1)=1.8892$$

**Pregunta 4 (4 Pts)**

El movimiento de una partícula electrónica responde al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y + e^{2t} \\ y' &= -x + y \end{aligned}$$

Si al inicio del movimiento la partícula se encuentra en la posición (1,1), encuentre la posición de la misma al minuto de haber iniciado el movimiento. Utilice el método de RK2. Considere tamaño de paso h=20 seg.

**Solución:**

$$\mathbf{U}' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{t}, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 3u_1 + u_2 + e^{2t} \\ -u_1 + u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k1_i = \begin{pmatrix} k1_{1,i} \\ k1_{2,i} \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 3u_{1,i} + u_{2,i} + e^{2t_i} \\ -u_{1,i} + u_{2,i} \end{pmatrix}$$

$$k2_i = \begin{pmatrix} k2_{1,i} \\ k2_{2,i} \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 3(u_{1,i} + k1_{1,i}) + (u_{2,i} + k1_{2,i}) + e^{2t_{i+1}} \\ -(u_{1,i} + k1_{1,i}) + (u_{2,i} + k1_{2,i}) \end{pmatrix}$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{1}{2}(k1_i + k2_i)$$

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(k1_0 + k2_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{1.6667} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{3.6492} \\ \mathbf{-0.5556} \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \mathbf{3.6580} \\ \mathbf{0.7222} \end{pmatrix}$$

$Donde:$

$$k1_0 = h\begin{pmatrix} 3u_{1,0} + u_{2,0} + e^{2t_0} \\ -u_{1,0} + u_{2,0} \end{pmatrix} = (1/3)\begin{pmatrix} 3 + 1 + e^0 \\ -1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.6667} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$k2_0 = h\begin{pmatrix} 3(u_{1,0} + k1_{1,0}) + (u_{2,0} + k1_{2,0}) + e^{2t_1} \\ -(u_{1,0} + k1_{1,0}) + (u_{2,0} + k1_{2,0}) \end{pmatrix} =$$

$$= (1/3)\begin{pmatrix} 3(1 + 1.6667) + (1 + 0) + e^{2/3} \\ -(1 + 1.6667) + (1 + 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3.6492} \\ \mathbf{-0.5556} \end{pmatrix}$$

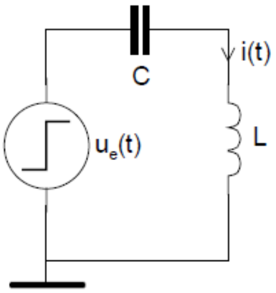
z =

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 0.3333 | 3.6580 | 0.7222 |
| 0.6667 | 10.6244 | -1.1774 |
| 1.0000 | 27.8128 | -7.6831 |

**Pregunta 5 (4 Pts)**

**a)** (1 Pto.) Determine el sistema de EDOs correspondiente a la ecuación del circuito eléctrico descrito en la figura 1:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = \frac{1}{L}\left(\frac{du_e(t)}{dt} - \frac{1}{C} i(t)\right)$$




**Datos:**

**C=1 μF**

**L= 10 mH.**

**$u_e$(t)=0V en $t_0$, después 1V.**

**Figura 1 Circuito Eléctrico**

**b)** (2 Pts.) Determine los dos primeros valores de la función solución para la corriente de malla con un tamaño de paso h = 0.02 ms desde el momento $t_0$= 0 con el método de Euler. Con valores iniciales i(0)=0, di(0)/dt=1/L

**c)** (1 Pto.) Determine el algoritmo de Taylor de orden 2.

**Solución:**

La ecuación integral se transforma mediante la derivación de una ecuación diferencial de primer orden y de forma explícita para i (t) se escribe:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = \frac{1}{L}\left(\frac{du_e(t)}{dt} - \frac{1}{C} i(t)\right)$$

a)

$$u_e(t) = \begin{cases} 0 & ;t = 0 \\ 1 & ;t > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{du_e(t)}{dt} = 0$$

Datos:

| | | |
|---|---|---|
| L=0.01 | $i(t_0)$=0 | $t_0$=0 |
| C=1.00E-06 | i'(t0)=1.00E+02 | h=2.00E-05 |

$$i = z_1$$
$$i' = z_2$$
$$z_1' = z_2$$
$$z_2' = i'' = \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{C} z_1\right)$$
$$z_1(0) = 0$$
$$z_2(0) = 10^2$$

b)Algoritmo de Euler:

$$Z^{(i+1)} = Z^{(i)} + hF(t, Z^{(i)})$$

| i | $t_i$ | $z1=i(t_i)$ | $z2=i'(t_i)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 100 |
| 1 | 0.00002 | 2.00E-03 | 100 |
| 2 | 0.00004 | 4.00E-03 | 96 |

c)

$$\begin{pmatrix} z_{1,i+1} \\ z_{2,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1,i} \\ z_{2,i} \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} z_{2,i} \\ -\dfrac{1}{LC} z_{1,i} \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} -\dfrac{z_{1,i}}{LC} \\ -\dfrac{z_{2,i}}{LC} \end{pmatrix}$$

Los Profesores