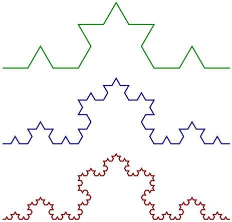
Sistema de Ecuaciones No Lineales

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ingenieria Industrial



Métodos Computacionales

Agenda

Antecedente

- La finalidad principal de las matemáticas aplicadas es determinar valores de x que cumplan con $f(x) = 0$. A estos valores les denominamos raíces o ceros de la ecuación.
- Para polinomios de primer a tercer orden existen fórmulas que permiten lograr el objetivo antes dicho, sin embargo para grados superiores la situación se complica.
- En muchos casos no se puede resolver la ecuación de forma analítica salvo por aproximaciones sucesivas.

Métodos Gráficos

Los métodos Gráficos son utiles porque proporcionan un valor inicial a ser usado por otros métodos

Ejemplo

Localice gráficamente las raíces de $f(x) = 0$, siendo

$$f(x) = |x| - e^x$$

Solución:

En primer lugar, se debe reescribir la ecuación

$$f(x) = 0 \qquad \ldots (1)$$

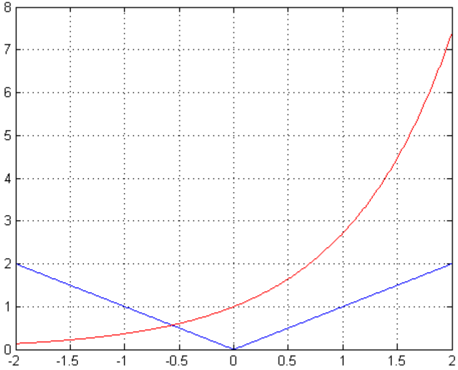
a una forma equivalente

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad \ldots (2)$$

Siendo f_1 y f_2 funciones cuyas gráficas sean más simple que la de f. Asimismo las raíces de (1) serán soluciones de (2), i.e, los puntos de intersección de f_1 y f_2.

Continuación...

De la ecuación, entonces $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = e^x$
Haciendo: $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = e^x$, graficando f_1 y f_2.
Del gráfico verificamos que el punto(único) de intersección, x^*, se sitúa en el intervalo $\langle -1, 0 \rangle$.



Métodos de los Intervalos

- Estos métodos empiezan con un intervalo que contiene a la raíz y un procedimiento es usado para reducir el intervalo que contiene a la raíz.
- Ejemplos de métodos de intervalos :
  - Método de la Bisección
  - Método de Falsa posición

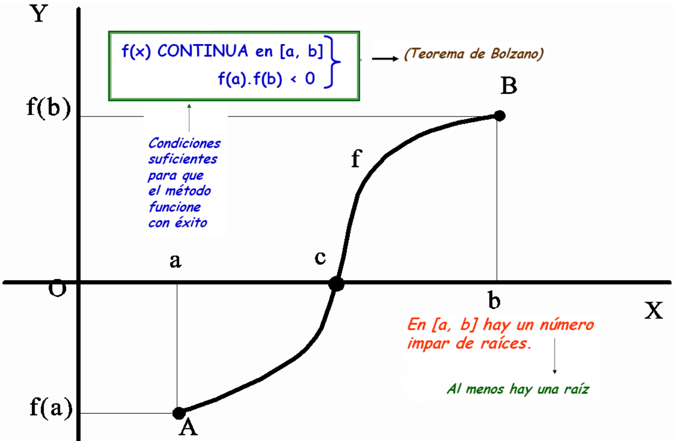
Métodos de Solución

Muchos métodos son disponibles para resolver ecuaciones no lineales

- Método de Bisección
- Método de Newton
- Método de la Secante
- Método de Falsa Posición
- Método de Muller
- Iteración del Punto Fijo

Teorema (Bolzano)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$ *tal que* $f(a) * f(b) < 0$. *Entonces existe* $c \in \langle a, b \rangle$ *tal que* $f(c) = 0$.



Método de la Bisección

Requisitos:
$f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, $f(a)$ y $f(b)$ deben tener signo opuesto.

Definición (Método de la Bisección:)

Dado un intervalo $[a, b]$ que contiene un cero de $f(x)$, en cada iteración, el método de la Bisección reduce el intervalo que contiene al cero a un 50%.
Los requisitos garantizan la existencia de al menos una raíz r en $[a, b]$ tal que $f(r) = 0$ y el método de Bisección converge

Continuación...

Cálculo de las raíces $f(x) = 0$

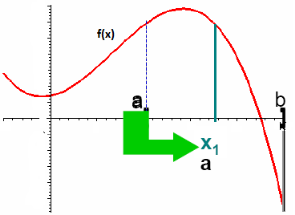
Primera Iteración:

Punto medio:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

Evaluación de la función en el punto medio $f(x_1)$

Determinación del nuevo intervalo de búsqueda.



Si $(f(x_1).f(a) < 0)$ entonces: $b \leftarrow x_1$

Si $(f(x_1).f(a) > 0)$ entonces: $a \leftarrow x_1 \Leftarrow$ **(En el dibujo)**

Continuación...

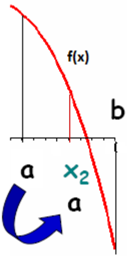
Segunda Iteración:

Punto medio:

$$x_2 = \frac{a+b}{2}$$

Evaluación de la función en el punto medio $f(x_2)$

Determinación del nuevo intervalo de búsqueda.



Si $(f(x_2).f(a) < 0)$ entonces: $b \leftarrow x_2$

Si $(f(x_2).f(a) > 0)$ entonces: $a \leftarrow x_2 \Leftarrow$ **(En el dibujo)**

Continuación...

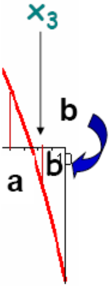
Tercera Iteración:

Punto medio:

$$x_3 = \frac{a+b}{2}$$

Evaluación de la función en el punto medio $f(x_3)$

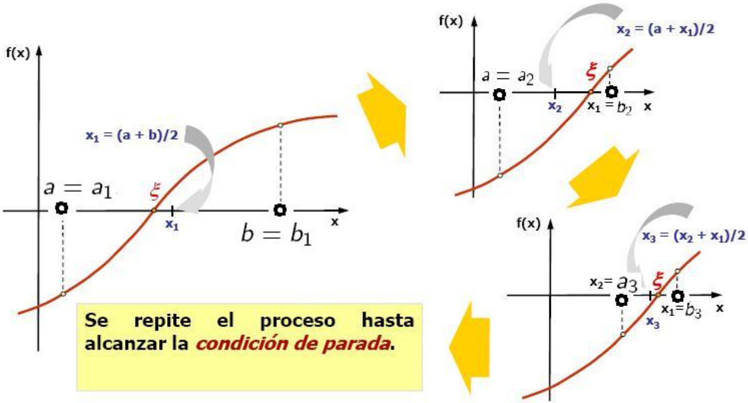
Determinación del nuevo intervalo de búsqueda.



Si $(f(x_3).f(a) < 0)$ entonces: $b \leftarrow x_3$

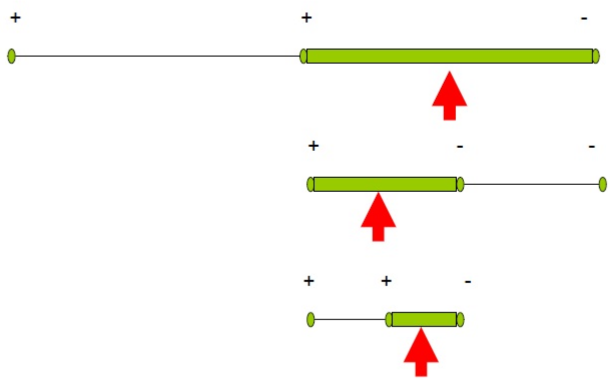
Si $(f(x_3).f(a) > 0)$ entonces: $a \leftarrow x_3 \Leftarrow$ **(En el dibujo)**

Ejemplo:



f(x)
$x_1 = (a + b)/2$
$a = a_1$
ξ
x_1
$b = b_1$
x
f(x)
$x_2 = (a + x_1)/2$
$a = a_2$
ξ
x_2
$x_1 = b_2$
x
f(x)
$x_3 = (x_2 + x_1)/2$
$x_2 = a_3$
ξ
$x_1 = b_3$
x_3
x
Se repite el proceso hasta alcanzar la *condición de parada*.

Ejemplo:



Número de Iteraciones

¿Cuántas iteraciones deben realizarse para asegurar que la raíz buscada dista menos de ϵ de la solución exacta?

Al comenzar el intervalo de búsqueda mide: $L_0 = (b - a)$

Tras la primera iteración el nuevo intervalo de búsqueda mide: $L_1 = \frac{1}{2}L_0 = \frac{1}{2}(b - a)$

Tras la segunda iteración el nuevo intervalo de búsqueda mide: $L_2 = \frac{1}{2}L_1 = \frac{1}{2^2}(b - a)$

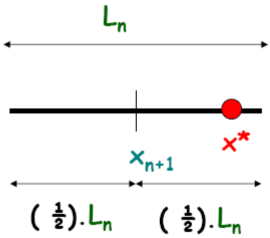
...

Tras la n-ésima iteración el nuevo intervalo de búsqueda mide: $L_n = \frac{1}{2}L_{n-1} = \frac{1}{2^n}(b - a)$

Continuación...

Si se toma como raíz aproximada tras n iteraciones el punto medio del intervalo de búsqueda (punto x_{n+1}) la distancia a la raíz exacta x^* será menor que $\frac{1}{2}L_n$.

Luego:



$$|x^* - x_{n+1}| \leq (\tfrac{1}{2}).L_n = \frac{b-a}{2^{(n+1)}}$$

Continuación...

Una precisión mayor que ϵ se asegura realizando un número de iteraciones (n) tal que:

$$|x^* - x_{n+1}| \leq \frac{b-a}{2^{(n+1)}} < \epsilon \longrightarrow 2^{n+1} > \frac{b-a}{\epsilon}$$

$$\longrightarrow (n+1)\ln(2) > \ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right) \longrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ingenieria Industrial

Ejemplo

Ejemplo

Encontrar la raíz de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ *en el intervalo* $[0, 1]$

Solución:

- $f(x)$ es continua
- $f(0) = 1,\ f(1) = -1 \longrightarrow f(a) * f(b) < 0$
- Podemos usar el método de Bisección para encontrar la raíz.

Ejemplo:

Iteración	a	b	c = $\frac{(a+b)}{2}$	f(x)	$\frac{(b-a)}{2}$
1	0	1	0.5	-0.375	0.5
2	0	0.5	0.25	0.266	0.25
3	0.25	0.5	.375	-7.23E-3	0.125
4	0.25	0.375	0.3125	9.30E-2	0.0625
5	0.3125	0.375	0.34375	9.37E-3	0.03125

Algoritmo de la Bisección

Algoritmo

Dado un intervalo inicial $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$

while $(b-a)/2 <$TOL

  $c = (a+b)/2$

  if $f(c) = 0$ **stop end**

  if $f(a)f(c) < 0$

    $b = c$

  else

    $a = c$

  end

end

Análisis del Método de Bisección

Teorema (Teorema de la Bisección)

Si f es continua en $[a, b]$, y existe $\boldsymbol{s}$, una única raíz de $f(x) = 0$. Si $f(a) * f(b) < 0$ entonces:

$$|s - x_{k+1}| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

y la sucesión $\{x_k\}$ converge a la raíz $\boldsymbol{s}$.

Ejemplo

Ejemplo

Usar el método de la bisección para aproximar la raíz $f(x) = e^{-x} - \ln x$, *comenzando en el intervalo* $[1, 2]$ *con una precisión de 3 c.d.e*

Solución: $a = 1; b = 2$

$x_1 = \dfrac{a+b}{2} = 1.5$

$f(x_1) = -0.1823 < 0;\ f(1) > 0; f(2) < 0$

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo [1,1.5]

a=1; b=1.5

La nueva aproximación es $x_2 = \dfrac{1+1.5}{2} = 1.25$

Con una precisión de 3 cifras decimales exactas:
$Tol = 0.5 * 10^{-3}$

$$n \geq \frac{\ln\left(\dfrac{2-1}{0.5 * 10^{-3}}\right)}{\ln 2} - 1 = 9.9658$$

Para alcanzar la precisión se requiere como mínimo: 10 iteraciones. Tras 10 iteraciones se alcanza la precisión deseada.

Tabla

$f(x)=exp(-x)-ln(x)$

Iter	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
1.0000	1.0000	2.0000	1.5000	0.3679	-0.1657	0.0470
2.0000	1.5000	2.0000	1.7500	0.0470	-0.1657	-0.0693
3.0000	1.5000	1.7500	1.6250	0.0470	-0.0693	-0.0139
4.0000	1.5000	1.6250	1.5625	0.0470	-0.0139	0.0158
5.0000	1.5625	1.6250	1.5938	0.0158	-0.0139	0.0007
6.0000	1.5938	1.6250	1.6094	0.0007	-0.0139	-0.0066
7.0000	1.5938	1.6094	1.6016	0.0007	-0.0066	-0.0030
8.0000	1.5938	1.6016	1.5977	0.0007	-0.0030	-0.0011
9.0000	1.5938	1.5977	1.5957	0.0007	-0.0011	-0.0002
10.0000	1.5938	1.5957	1.5947	0.0007	-0.0002	0.0003
11.0000	1.5947	1.5957	1.5952	0.0003	-0.0002	0.0000

Algoritmo

Dados: a, b, ε, f(x)

Calcular: $\text{numit} > \dfrac{\ln\left(\dfrac{|a-b|}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$

INICIO

PARA *j* DESDE 0 HASTA *numit* CON PASO 1 HACER:

1° $x = \dfrac{a+b}{2}$ 2° $vmed = f(x)$

3° SI (vmed.f(a) > 0) ENTONCES:

$a \leftarrow x$

SI NO

$b \leftarrow x$

FIN CONDICIÓN

FIN BUCLE

Observaciones

Ventajas

- Simple y fácil de implementar
- Se evalua solo una función por iteración
- el tamaño del intervalo que contiene el cero es reducido al 50% después de cada iteración.
- El número de iteraciones pueden ser determinado a priori
- No se necesita la derivada.
- La función no tiene que ser diferenciable

Desventajas

- Lenta
- Aproximaciones intermedias buenas podrían ser descartadas

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ingenieria Industrial

Método Regula Falsi (Motivación)

¿Cúal es la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$?

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

¿Cual es la intersección de la recta con el eje X.

$$c = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

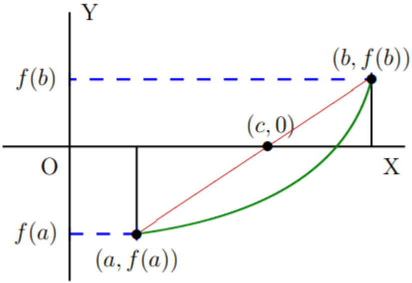
Método Regula Falsi

1. Determinar un intervalo [a,b] tal que f(a) tiene signo distinto de f(b).
2. Hallar el punto c que divide el intervalo [a,b] en partes proporcionales a f(a) y f(b).

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

3. La intersección de esta recta con el eje X es una aproximación a la raíz
4. Elegir, entre [a,c] y [c,b], un intervalo en el que la función cambie de signo.
5. Repetir los pasos 2 y 3 hasta conseguir la precisión deseada.

Método Regula Falsi



$$\boxed{c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$$

Algoritmo

Algoritmo del Método de Regula Falsi

1. $a_0 = a, \;\; b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots,$ hacer:
   - $m_n = \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$
   - Si $f(a_n)f(m_n) < 0$, tomar $a_{n+1} = a_n, \;\; b_{n+1} = m_n$; en caso contrario, tomar $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$

Ejemplo

Ejemplo

Usar el método Posición Falsa para aproximar la raíz $f(x) = e^{-x} - \ln x$, *comenzando en el intervalo* $[1, 2]$.

Solución: $a = 1; b = 2$

$x_1 = a - f(a)\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} = 1 - f(1)\dfrac{2-1}{f(2)-f(1)} =$ 1.397410482

$f(x_1) = -0.087384509 < 0;\ f(1) > 0; f(2) < 0$

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo [1,1.397410408]

a=1; b=1.397410408

La nueva aproximación es x_2 =1.321130513.

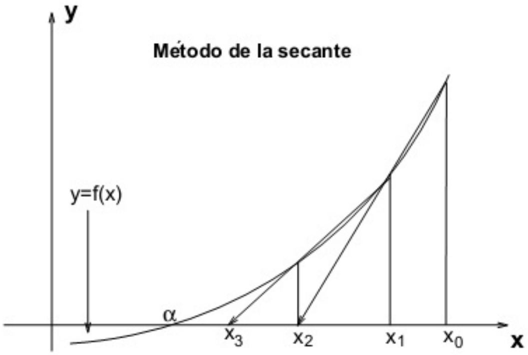
Método de la secante

Dada una función $f(x)$ contínua en el intervalo $[a, b]$ donde existe una única raiz, es posible determinar una aproximación de la raiz a partir de la intersección de la secante de la curva en dos puntos x_0 y x_1 con el eje X.

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right] \quad ; \quad n \geq 1$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

Método de la secante



Algoritmo

Algoritmo del Método de la Secante

1. $x_0 = a, \;\; x_1 = b$
2. Para $n = 1, 2, \ldots,$ hacer

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Ejemplo

Ejemplo

Usar el método de la secante para aproximar la raíz $f(x) = e^{-x^2} - x$, *comenzando con* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Solución:

Tenemos que $f(x_0) = 1$ y $f(x_1) = -0.6321$

Sustituimos en la fórmula de la secante para calcular la aproximación x_2

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right) =$$

$$= 1 - f(1)\left(\frac{1 - 0}{f(1) - f(0)}\right) = 0.6127$$

Método del Punto Fijo

Definición (Punto Fijo)

Un punto fijo de una función g es número p tal que $g(p) = p$.

Ejemplo

Para calcular los puntos fijos de la función $g(x) = x^2 - 6$, consideramos la ecuación $g(x) = x$, i.e. $x^2 - x - 6 = 0$. Puntos fijos: 3 y -2.

Conexiones entre dos problemas: búsqueda de los puntos fijos y búsqueda de las raíces

Si g tiene punto fijo p, entonces $f(x) = g(x) - x$ tiene un cero en p. Si f tiene una raíz p, entonces $g(x) = x - f(x)$ tiene punto fijo p (También $g(x) = x + 5f(x)$ tiene punto fijo p). Hay muchas formas de construir g que tiene punto fijo p.

Método del Punto Fijo

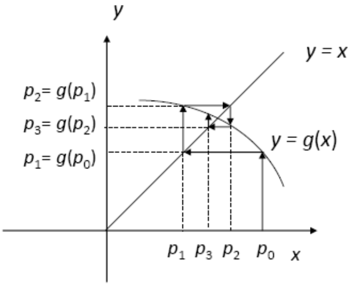
1. Transformar la ecuación $f(x) = 0$ en una ecuación equivalente de punto fijo: $x = g(x)$.
2. Tomar una estimación inicial x_0 del punto fijo x^* de g. (x^* punto fijo de g si $g(x^*) = x^*$).
3. Para $k = 1, 2, 3, \ldots$ hasta que converja, iterar $x_{n+1} = g(x_n)$.

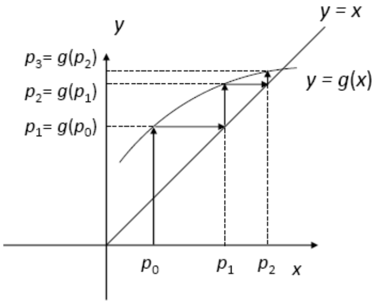
Teorema (Sobre la existencia y unicidad del punto fijo)

a) *Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces g tiene un punto fijo en $[a, b]$.*

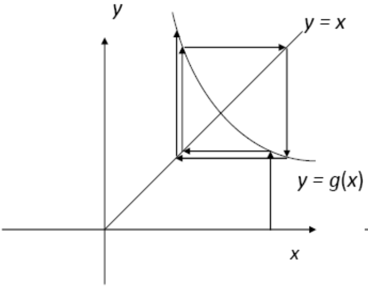
b) *Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, g' existe en todo punto de $\langle a, b\rangle$ y existe $k \in \langle 0, 1\rangle$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in \langle a, b\rangle$. Entonces el punto fijo de g en $[a, b]$ es único.*

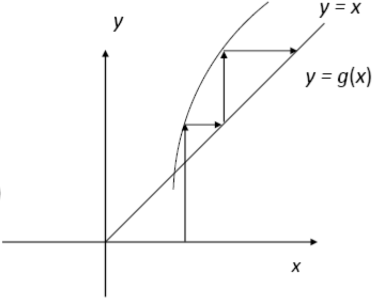
Convergencia





Divergencia





Ejemplos

Ejemplo

Verificar si la función $g(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$ *cumple las condiciones del teorema en el intervalo* $[-1,1]$*; en el intervalo* $[3,4]$*. Calcular los puntos fijos de* g*.*

Ejemplo

Considere la función $f(x) = x^5 + x - 1$ *en el intervalo* $[0,1]$*. Construir una función* g *que cumpla con las condiciones del teorema y que tenga el punto fijo* p*. Probar las siguientes funciones*

- $g(x) = 1 - x^5$
- $g(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$
- $g(x) = \sqrt[5]{1-x}$

Teorema

Teorema (Iteración de punto fijo)

Sea $g \in C[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$, existe g' en $\langle a,b\rangle$ y existe $k \in \langle 0,1\rangle$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in \langle a,b\rangle$. Entonces, para cualquier número $p_0 \in [a,b]$, la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$\boxed{p_n = g(p_{n-1}), \qquad n \geq 1}$$

converge al punto fijo de la función g en $[a,b]$. Presentado como cota de error

$$\boxed{|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_0 - p_1|, \qquad n \geq 1}$$

Ejemplo

Usar el método del punto fijo para aproximar las raices de $f(x) = x^2 - 2x - 3$, *comenzando con* $x_0 = 4$.

Solución:

Existen muchas formas de cambiar la ecuación $f(x) = 0$ a la forma $x = F(x)$, efectuando manipulaciones algebraicas simples.

Para el ejemplo, sea:

$$x = F(x) = \sqrt{2x + 3}$$

Evaluamos la función F en un punto inicial x_0

$x_1 = F(x_0) = F(4) = 3.31662$

$x_2 = F(x_1) = F(3.31662) = 3.03439$

Método de Newton

El método de Newton-Raphson, también llamado sencillamente método de Newton, es el método más famoso para hallar los ceros de una función. A diferencia del método de la bisección, necesita que se evalúe la derivada $f'(x)$ además de la propia función.

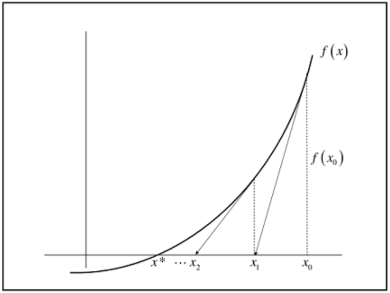
- Es lejos uno de los métodos más usados para resolver ecuaciones.
- A partir de una estimación inicial x_0 se efectúa un desplazamiento a lo largo de la tangente hacia su intersección con el eje x, y se toma ésta como la siguiente aproximación.

Interpretación Geométrica

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

Cuando $y = 0, x = x_{n+1}$ o sea



$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

o

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Continuación...

Más concretamente el método de Newton consiste en generar las sucesión

$$\left\{ x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right\}_{i=0}^{\infty}$$

a partir de un valor x_0 dado.
Si denotamos

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Estamos en presencia de un caso particular del método del Punto Fijo.

Ejemplo

Aproximar la solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ *utilizando el método de Newton,* $x_0 = 1, \; x_0 = 3$

$$\boxed{x^2 - 4 = 0}$$

$x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0{}^2 - 4)}{2x_0}$$

$$x_1 = 1 - \frac{(1^2 - 4)}{2*1} = 1.5$$

$$x_2 = 1.5 - \frac{(1.5^2 - 4)}{2*1.5} = \frac{23}{12}$$

$x_0 = 3$

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0{}^2 - 4)}{2x_0}$$

$$x_1 = 3 - \frac{(3^2 - 4)}{2*3} = 2.1666$$

$$x_2 = 2.1666 - \frac{(2.1666^2 - 4)}{2*2.1666} = 2{,}006$$

Propiedad

Propiedad

Si la función $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ *definida en* $[a, b]$ *toma valores en* $[a, b]$, *es de clase* $C^1([a, b])$ *y además:*

$$|g'(x)| = \left|\frac{f''(x).f(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1, \qquad \forall x \in [a, b]$$

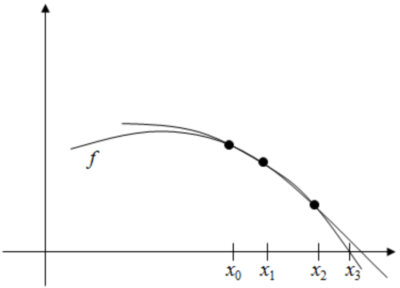
entonces la sucesión dada por $\left\{x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right\}_{i=0}^{\infty}$ *obtenida a partir de cualquier punto* $x_0 \in [a, b]$ *converge hacia la única solución de la ecuación* $f(x) = 0$ *en* $[a, b]$.

Método de Muller

El método de Muller es similar al método de la secante, pero a diferencia de éste; el método de Müller hace uso de una parábola para aproximar a la raíz. El método consiste en obtener los coeficientes de la parábola que pasan por los tres puntos, Dichos coeficientes se sustituyen en la fórmula cuadrática para obtener el valor donde la parábola intersecta al eje x; es decir, la raíz estimada. La aproximación se facilita al escribir la ecuación de la parábola en una forma conveniente.

Método de Muller

- Utiliza tres aproximaciones: x_0, x_1, x_2.
- Determina la siguiente aproximación x_3 encontrando la intersección con el eje X de la parábola definida por los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$.



Método de Muller

Se considera el polinomio

$$P(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

Se puede encontrar a, b y c resolviendo

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$$

$$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c$$

Método de Muller

Se llega a

$$c = f(x_2)$$

$$b = \frac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$a = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

Continuación...

Otra Forma

$h_0 = (x_1 - x_0), \quad h_1 = (x_2 - x_1)$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad \delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Luego:

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_0 + h_1}$$

$$b = ah_1 + \delta_1$$

$$c = f(x_2)$$

El método de Müller converge bastante rápidamente. Además, se puede utilizar en el caso de raíces complejas. Para evitar overflows cuando **a** es muy pequeño, es conveniente escribir $x - x_2$ como

$$x - x_2 = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad \ldots(*)$$

tomando el signo que haga máximo el módulo del denominador. El método de Müller puede tomar como valores de comienzo números complejos, en cuyo caso sirve para obtener raíces complejas.

Dado los puntos en valor creciente: $x_0 < x_2 < x_1$; evaluamos en $(*)$ y obtenemos x_3. Los nuevos puntos seran: x_1, x_2, x_3.
Observacion: Si se empieza en x_2 ,obtenemos x_0 y x_1 como

$$x_1 = x_2 + hx_2$$

$$x_0 = x_2 - hx_2$$

h es el incremento.

Algoritmo

Dato Inicial: $x_r,\ h,\ MaxIter$

$x_2 \leftarrow x_r$

$x_1 \leftarrow x_r + h * x_r$

$x_0 \leftarrow x_r - h * x_r$

Para i=1 hasta MaxIter

$h_0 \leftarrow x_1 + x_0$

$h_1 \leftarrow x_2 - x_1$

$d_0 \leftarrow (f(x_1) - f(x_0))/h_0$

$d_1 \leftarrow (f(x_2) - f(x_1))/h_1$

$a \leftarrow (d_1 - d_0)/(h_1 + h_0)$

$b \leftarrow a * h_1 + d_1$

$c \leftarrow f(x_2)$

$rad \leftarrow sqrt(b*b-4a*c)$

Si $|-b+rad| > |-b-rad|$ **entonces**

$den \leftarrow -b+rad$

Caso Contrario

$den \leftarrow -b-rad$

Fin Si

$x_3 \leftarrow x_2+(2*c)/den$

$x_0 \leftarrow x_1$

$x_1 \leftarrow x_2$

$x_2 \leftarrow x_3$

Fin Para

EJEMPLO

Ejemplo

Utilizando el método de Muller, aproximar

$$f(x) = x^3 - 13x - 12; \qquad x_r = 5$$

Consideremos ahora de la siguiente manera:

$h = 0.1$

$x_0 = x_r - h * x_r = 5 - 0.1 * 5 = 4.5$

$x_2 = x_r = 5$

$x_1 = x_r + h * x_r = 5 + 0.1 * 5 = 5.5$

EJEMPLO

Primera Iteración:

Conocido $x_0 = 4.5,\ x_1 = 5.5,\ x_2 = 5$, hallamos x_3

$$f(x_0) = f(4.5) = 20.6250; \quad f(x_1) = f(5.5) = 82.8750$$

$$f(x_2) = f(5) = 48$$

Calculando:

$h_0 = x_1 - x_0 = 1; \quad h_1 = x_2 - x_1 = -0.5$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{82.8750 - 20.6250}{1} = 62.2500$$

$$\delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{48 - 82.8750}{-0.5} = 69.7500$$

Hallando los coeficientes:

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_0 + h_1} = \frac{69.7500 - 62.2500}{1 + (-0.5)} = 15$$

$$b = ah_1 + \delta_1 = 15 + 69.7500 = 62.2500$$

$$c = f(x_2) = f(5) = 48$$

Luego:

$$x_3 = x_2 + \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} = 5 + \frac{2 * 48}{-62.25 \mp \sqrt{62.25^2 - 4 * 15 * 48}}$$

Dado que:

$$\underbrace{\left| -62.25 - \sqrt{62.25^2 - 4*15*48} \right|}_{93.7946} > \underbrace{\left| -62.25 + \sqrt{62.25^2 - 4*15*48} \right|}_{30.7054}$$

tenemos:

$$x_3 = 5 + \frac{2*48}{-62.25 - \sqrt{62.25^2 - 4*15*48}} = 3.9765$$

Ahora, los nuevos x_0, x_1 , x_2 son:

$$x_0 \leftarrow x_1$$

$$x_1 \leftarrow x_2$$

$$x_2 \leftarrow x_3$$

Segunda Iteración:

$$x_3 = 4.0011$$

Sistema de ENL

Dada la función

$$
\begin{array}{rccc}
F: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\
 & (x_1,\ldots,x_2) & \longrightarrow & (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n))
\end{array}
$$

El objetivo es determinar una solución $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ del sistema de n ecuaciones con n incognitas

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
f_1(x_1,\ldots,x_n) & = & 0 \\
\vdots & & \\
f_n(x_1,\ldots,x_n) & = & 0
\end{array}
\right.
$$

En su forma matricial

$$F(x) = 0$$

con

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La resolución de sistemas de ecuaciones no lineales por procesos analíticos puede ser bastante difícil o imposible. En ese caso tenemos la necesidad de utilizar métodos numéricos para obtener una solución aproximada. Consideraremos los siguientes métodos iterativos:

- Método del Punto Fijo
- Método de Newton

Método del Punto Fijo

Fórmula de recurrencia

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde

$$G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}$$

que determina una sucesión de aproximaciones para una raíz x^* de la ecuación $F(x) = 0$, a partir de una aproximación inicial

$$x = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Definiciones

Definición

- *Norma 1:* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- *Norma 2 o norma euclidiana:* $\forall x \in \mathbb{R}^n,$
  $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- *Norma Infinita:*$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad ||x||_\infty = max_{1 \leq i \leq n}|x_i|.$

Método de Newton

Formula de recurrencia:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}) \quad k = 0, 1, \dots,$$

donde

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Dado el sistema no lineal

$$2x_1 - x_2 = e^{-x_1}$$
$$-x_1 + 2x_2 = e^{-x_2}$$

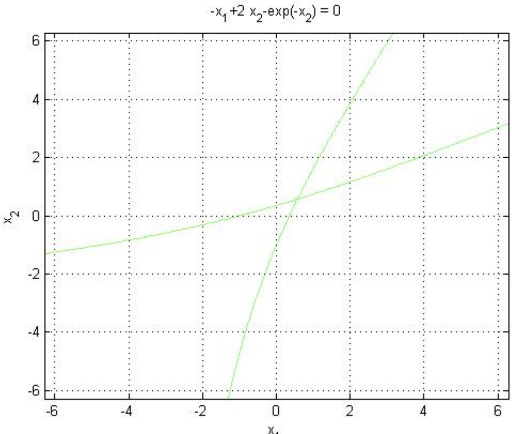
Se pide:

1. *Localizar gráficamente las raices.*
2. *Aproximar la solución utilizando el método de Newton. Considerar* $x^{(0)} = [0.5 \;\; 1]^T$. *Hallar el error cometido.*
3. *Aproximar la solución utilizando el método del Punto Fijo. Considerar* $x^{(0)} = [0.5 \;\; 1]^T$. *Hallar el error cometido.*

Solución

Arreglando:

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 - e^{-x_1} = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 - e^{-x_2} = 0$$



Continuación...

Solucion: (2)

$$F(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - e^{-x_1} \\ -x_1 + 2x_2 - e^{-x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)})$; $J_F(x) = \begin{bmatrix} 2 + e^{-x_1} & -1 \\ -1 & 2 + e^{-x_2} \end{bmatrix}$

$\Delta = 3 + 2(e^{-x_1} + e^{-x_2}) + e^{-x_1 - x_2}$

$$J_F^{-1}(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 2 + e^{-x_2} & 1 \\ 1 & 2 + e^{-x_1} \end{bmatrix}$$

Continuación...

Iteración:1

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0.6065 \\ 1.1321 \end{bmatrix}$$

$$J_F^{-1}(x^{(x_0)}) = \begin{bmatrix} 0.4578 & 1.934 \\ 0.1934 & 0.5040 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x^{(0)}} - \underbrace{\begin{bmatrix} -0.0588 \\ 0.4533 \end{bmatrix}}_{\Delta x^{(0)}}$$

Error$=||\Delta x^{(0)}|| = 0.4533$

Continuación...

Solución: 3
Algoritmo del Punto Fijo:

$$x_1 = \frac{x_2 + e^{-x_1}}{2} = g_1(x_1, x_2)$$

$$x_2 = \frac{x_1 + e^{-x_2}}{2} = g_2(x_1, x_2)$$

$$G(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Prueba de la convergencia:

$$J_G = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{[0.5,1]} = \begin{bmatrix} -0.3033 & 0.5 \\ 0.5 & -0.1839 \end{bmatrix}$$

Continuación...

$||J_G||_\infty = 0.8033$. Por lo tanto Converge.

$$x_1^{(k+1)} = \frac{x_2^{(k)} + e^{-x_1^{(k)}}}{2}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{x_1^{(k)} + e^{-x_2^{(k)}}}{2}$$

Primera Iteración:

$x^{(0)} = [0.5 \ \ 1]^T$

$$x_1^{(1)} = \frac{1 + e^{-0.5}}{2} = 0.8033$$

$$x_2^{(1)} = \frac{0.5 + e^{-1}}{2} = 0.4339$$

$$x^{(1)} = [0.8033 \ \ 0.4359]$$