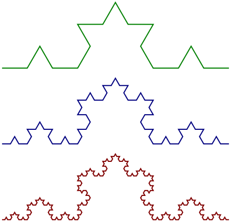
Sistema de Ecuaciones No Lineales

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingenieria Mecánica



Métodos Numérico

Agenda

Antecedente

- La finalidad principal de las matemáticas aplicadas es determinar valores de x que cumplan con $f(x) = 0$. A estos valores les denominamos raíces o ceros de la ecuación.
- Para polinomios de primer a tercer orden existen fórmulas que permiten lograr el objetivo antes dicho, sin embargo para grados superiores la situación se complica.
- En muchos casos no se puede resolver la ecuación de forma analítica salvo por aproximaciones sucesivas.

Métodos Gráficos

Los métodos Gráficos son utiles porque proporcionan un valor inicial a ser usado por otros métodos

Ejemplo

Localice gráficamente las raíces de $f(x) = 0$, siendo

$$f(x) = |x| - e^x$$

Solución:

En primer lugar, se debe reescribir la ecuación

$$f(x) = 0 \qquad \ldots(1)$$

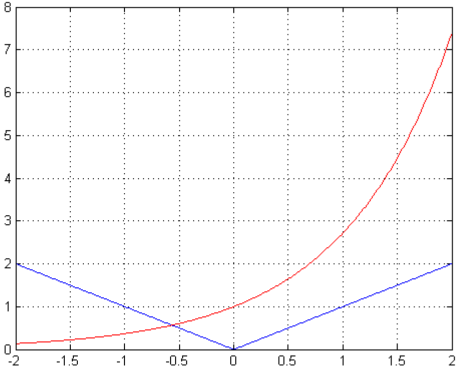
a una forma equivalente

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad \ldots(2)$$

Siendo f_1 y f_2 funciones cuyas gráficas sean más simple que la de f. Asimismo las raíces de (1) serán soluciones de (2), i.e, los puntos de intersección de f_1 y f_2.

Continuación...

De la ecuación, entonces $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = e^x$
Haciendo: $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = e^x$, graficando f_1 y f_2.
Del gráfico verificamos que el punto(único) de intersección, x^*, se sitúa en el intervalo $\langle -1, 0 \rangle$.



Métodos de los Intervalos

- Estos métodos empiezan con un intervalo que contiene a la raíz y un procedimiento es usado para reducir el intervalo que contiene a la raíz.
- Ejemplos de métodos de intervalos :
  - Método de la Bisección
  - Método de Falsa posición

Métodos de Solución

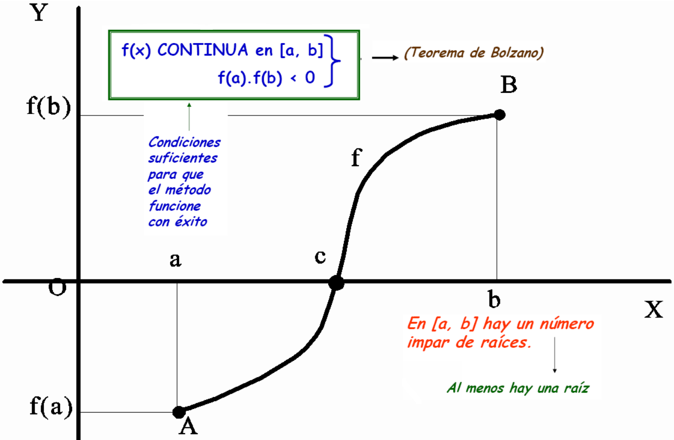
Muchos métodos son disponibles para resolver ecuaciones no lineales

- Método de Bisección
- Método de Newton
- Método de la Secante
- Método de Falsa Posición
- Método de Muller
- Iteración del Punto Fijo

Teorema

Teorema (Bolzano)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$ *tal que* $f(a) * f(b) < 0$. *Entonces existe* $c \in \langle a, b \rangle$ *tal que* $f(c) = 0$.



Método de la Bisección

Requisitos:
$f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, $f(a)$ y $f(b)$ deben tener signo opuesto.

Definición (Método de la Bisección:)

Dado un intervalo $[a, b]$ que contiene un cero de $f(x)$, en cada iteración, el método de la Bisección reduce el intervalo que contiene al cero a un 50%.
Los requisitos garantizan la existencia de al menos una raíz r en $[a, b]$ tal que $f(r) = 0$ y el método de Bisección converge

Continuación...

Cálculo de las raíces $f(x) = 0$

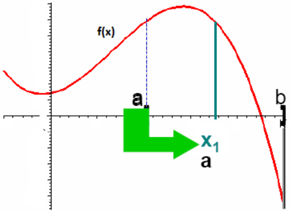
Primera Iteración:

Punto medio:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

Evaluación de la función en el punto medio $f(x_1)$

Determinación del nuevo intervalo de búsqueda.



Si $(f(x_1).f(a) < 0)$ entonces: $b \leftarrow x_1$

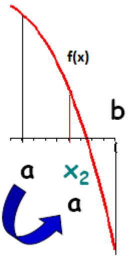
Si $(f(x_1).f(a) > 0)$ entonces: $a \leftarrow x_1 \Leftarrow$ **(En el dibujo)**

Continuación...

Segunda Iteración:
Punto medio:

$$x_2 = \frac{a+b}{2}$$

Evaluación de la función en el punto medio $f(x_2)$
Determinación del nuevo intervalo de búsqueda.



Si $(f(x_2).f(a) < 0)$ entonces: $b \leftarrow x_2$

Si $(f(x_2).f(a) > 0)$ entonces: $a \leftarrow x_2 \Leftarrow$ **(En el dibujo)**

Continuación...

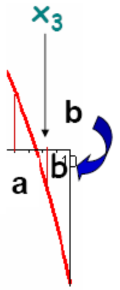
Tercera Iteración:

Punto medio:

$$x_3 = \frac{a+b}{2}$$

Evaluación de la función en el punto medio $f(x_3)$

Determinación del nuevo intervalo de búsqueda.

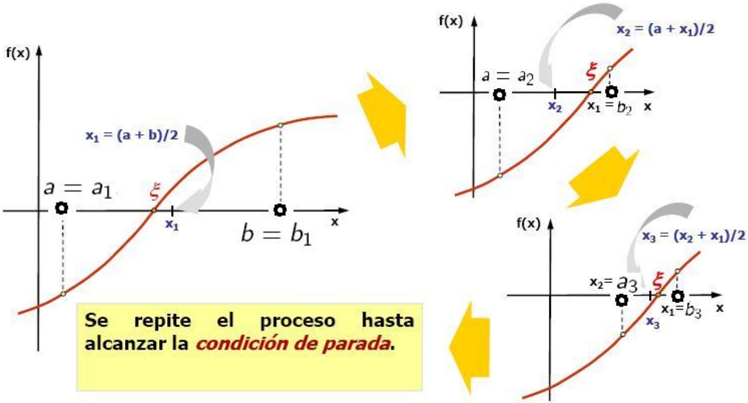


Si $(f(x_3).f(a) < 0)$ entonces: $b \leftarrow x_3$

Si $(f(x_3).f(a) > 0)$ entonces: $a \leftarrow x_3 \Leftarrow$ **(En el dibujo)**

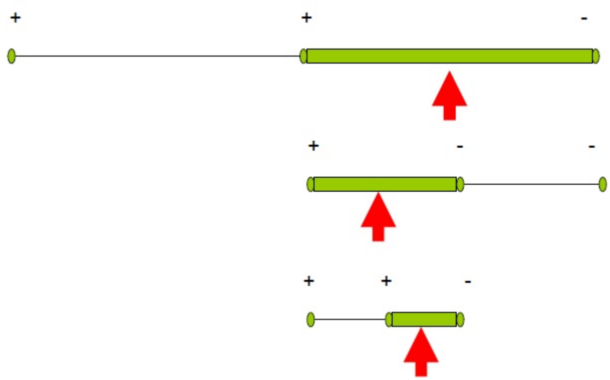
Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingenieria Mecánica

Ejemplo:



f(x)
x1 = (a + b)/2
a = a1
ξ
x1
b = b1
x
f(x)
x2 = (a + x1)/2
a = a2
ξ
x2
x1 = b2
x
f(x)
x3 = (x2 + x1)/2
x2= a3
ξ
x1=b3
x3
x
Se repite el proceso hasta alcanzar la condición de parada.

Ejemplo:



Número de Iteraciones

¿Cuántas iteraciones deben realizarse para asegurar que la raíz buscada dista menos de ϵ de la solución exacta?

Al comenzar el intervalo de búsqueda mide: $L_0 = (b - a)$

Tras la primera iteración el nuevo intervalo de búsqueda mide: $L_1 = \frac{1}{2}L_0 = \frac{1}{2}(b-a)$

Tras la segunda iteración el nuevo intervalo de búsqueda mide: $L_2 = \frac{1}{2}L_1 = \frac{1}{2^2}(b-a)$

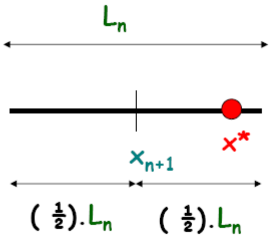
...

Tras la n-ésima iteración el nuevo intervalo de búsqueda mide: $L_n = \frac{1}{2}L_{n-1} = \frac{1}{2^n}(b-a)$

Continuación...

Si se toma como raíz aproximada tras n iteraciones el punto medio del intervalo de búsqueda (punto x_{n+1}) la distancia a la raíz exacta x^* será menor que $\frac{1}{2}L_n$.

Luego:



$$|x^* - x_{n+1}| \leq (\tfrac{1}{2}).L_n = \frac{b-a}{2^{(n+1)}}$$

Continuación...

Una precisión mayor que ϵ se asegura realizando un número de iteraciones (n) tal que:

$$|x^* - x_{n+1}| \leq \frac{b-a}{2^{(n+1)}} < \epsilon \longrightarrow 2^{n+1} > \frac{b-a}{\epsilon}$$

$$\longrightarrow (n+1)\ln(2) > \ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right) \longrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

Ejemplo

Ejemplo

Encontrar la raíz de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ *en el intervalo* $[0, 1]$

Solución:

- $f(x)$ es continua
- $f(0) = 1, \ f(1) = -1 \longrightarrow f(a) * f(b) < 0$
- Podemos usar el método de Bisección para encontrar la raíz.

Ejemplo:

Iteración	a	b	$c = \frac{(a+b)}{2}$	f(x)	$\frac{(b-a)}{2}$
1	0	1	0.5	-0.375	0.5
2	0	0.5	0.25	0.266	0.25
3	0.25	0.5	.375	-7.23E-3	0.125
4	0.25	0.375	0.3125	9.30E-2	0.0625
5	0.3125	0.375	0.34375	9.37E-3	0.03125

Algoritmo de la Bisección

Algoritmo

Dado un intervalo inicial $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$

while $(b - a)/2 <$TOL

$c = (a + b)/2$

if $f(c) = 0$ **stop end**

if $f(a)f(c) < 0$

$b = c$

else

$a = c$

end

end

Análisis del Método de Bisección

Teorema (Teorema de la Bisección)

*Si f es continua en $[a, b]$, y existe **s**, una única raíz de $f(x) = 0$. Si $f(a) * f(b) < 0$ entonces:*

$$|s - x_{k+1}| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

*y la sucesión $\{x_k\}$ converge a la raíz **s**.*

Ejemplo

Ejemplo

Usar el método de la bisección para aproximar la raíz $f(x) = e^{-x} - \ln x$, *comenzando en el intervalo* $[1,2]$ *con una precisión de 3 c.d.e*

Solución: $a = 1; b = 2$

$x_1 = \dfrac{a+b}{2} = 1.5$

$f(x_1) = -0.1823 < 0;\ f(1) > 0; f(2) < 0$

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo [1,1.5]

a=1; b=1.5

La nueva aproximación es $x_2 = \dfrac{1+1.5}{2} = 1.25$

Con una precisión de 3 cifras decimales exactas:
$Tol = 0.5 * 10^{-3}$

$$n \geq \frac{\ln\left(\dfrac{2-1}{0.5*10^{-3}}\right)}{\ln 2} - 1 = 9.9658$$

Para alcanzar la precisión se requiere como mínimo: 10 iteraciones. Tras 10 iteraciones se alcanza la precisión deseada.

Tabla

$$f(x)=\exp(-x)-\ln(x)$$

Iter	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
1.0000	1.0000	2.0000	1.5000	0.3679	-0.1657	0.0470
2.0000	1.5000	2.0000	1.7500	0.0470	-0.1657	-0.0693
3.0000	1.5000	1.7500	1.6250	0.0470	-0.0693	-0.0139
4.0000	1.5000	1.6250	1.5625	0.0470	-0.0139	0.0158
5.0000	1.5625	1.6250	1.5938	0.0158	-0.0139	0.0007
6.0000	1.5938	1.6250	1.6094	0.0007	-0.0139	-0.0066
7.0000	1.5938	1.6094	1.6016	0.0007	-0.0066	-0.0030
8.0000	1.5938	1.6016	1.5977	0.0007	-0.0030	-0.0011
9.0000	1.5938	1.5977	1.5957	0.0007	-0.0011	-0.0002
10.0000	1.5938	1.5957	1.5947	0.0007	-0.0002	0.0003
11.0000	1.5947	1.5957	1.5952	0.0003	-0.0002	0.0000

Algoritmo

Dados: a, b, ε, f(x)

Calcular: $\text{numit} > \dfrac{\ln\left(\dfrac{|a-b|}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$

INICIO

PARA *j* DESDE 0 HASTA *numit* CON PASO 1 HACER:

1° $x = \dfrac{a+b}{2}$ 2° $\text{vmed} = f(x)$

3° SI (vmed.f(a) > 0) ENTONCES:

$a \leftarrow x$

SI NO

$b \leftarrow x$

FIN CONDICIÓN

FIN BUCLE

Observaciones

Ventajas

- Simple y fácil de implementar
- Se evalua solo una función por iteración
- el tamaño del intervalo que contiene el cero es reducido al 50% después de cada iteración.
- El número de iteraciones pueden ser determinado a priori
- No se necesita la derivada.
- La función no tiene que ser diferenciable

Desventajas

- Lenta
- Aproximaciones intermedias buenas podrían ser descartadas

Método Regula Falsi (Motivación)

¿Cúal es la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$?

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

¿Cual es la intersección de la recta con el eje X.

$$c = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

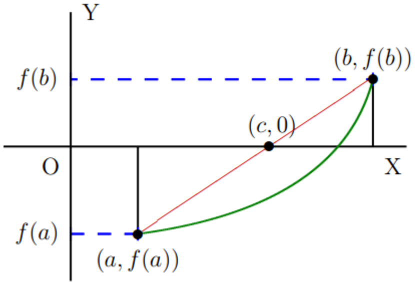
Método Regula Falsi

1. Determinar un intervalo [a,b] tal que f(a) tiene signo distinto de f(b).
2. Hallar el punto c que divide el intervalo [a,b] en partes proporcionales a f(a) y f(b).

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

3. La intersección de esta recta con el eje X es una aproximación a la raíz
4. Elegir, entre [a,c] y [c,b], un intervalo en el que la función cambie de signo.
5. Repetir los pasos 2 y 3 hasta conseguir la precisión deseada.

Método Regula Falsi



$$\boxed{c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$$

Algoritmo

Algoritmo del Método de Regula Falsi

1. $a_0 = a, \;\; b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots,$ hacer:
   - $m_n = \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$
   - Si $f(a_n)f(m_n) < 0$, tomar $a_{n+1} = a_n, \;\; b_{n+1} = m_n$; en caso contrario, tomar $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$

Ejemplo

Usar el método Posición Falsa para aproximar la raíz $f(x) = e^{-x} - \ln x$, *comenzando en el intervalo* $[1, 2]$.

Solución: $a = 1; b = 2$

$x_1 = a - f(a)\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} = 1 - f(1)\dfrac{2-1}{f(2)-f(1)} =$ 1.397410482

$f(x_1) = -0.087384509 < 0$; $f(1) > 0$; $f(2) < 0$

De donde vemos que la raíz se encuentra en el intervalo [1,1.397410408]

a=1; b=1.397410408

La nueva aproximación es x_2 =1.321130513.

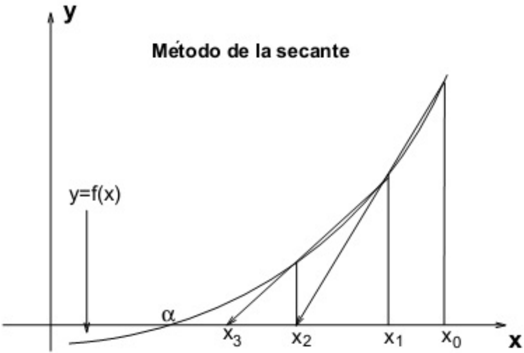
Método de la secante

Dada una función $f(x)$ contínua en el intervalo $[a, b]$ donde existe una única raiz, es posible determinar una aproximación de la raiz a partir de la intersección de la secante de la curva en dos puntos x_0 y x_1 con el eje X.

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right] \quad ; \quad n \geq 1$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

Método de la secante



Algoritmo

Algoritmo del Método de la Secante

1. $x_0 = a, \;\; x_1 = b$
2. Para $n = 1, 2, \ldots,$ hacer

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingenieria Mecánica

Ejemplo

Ejemplo

Usar el método de la secante para aproximar la raíz $f(x) = e^{-x^2} - x$, *comenzando con* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Solución:

Tenemos que $f(x_0) = 1$ y $f(x_1) = -0.6321$

Sustituimos en la fórmula de la secante para calcular la aproximación x_2

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right) =$$

$$= 1 - f(1)\left(\frac{1 - 0}{f(1) - f(0)}\right) = 0.6127$$

Método del Punto Fijo

Definición (Punto Fijo)

Un punto fijo de una función g es número p tal que $g(p) = p$.

Ejemplo

Para calcular los puntos fijos de la función $g(x) = x^2 - 6$, consideramos la ecuación $g(x) = x$, i.e. $x^2 - x - 6 = 0$. Puntos fijos: 3 y -2.

Conexiones entre dos problemas: búsqueda de los puntos fijos y búsqueda de las raíces

Si g tiene punto fijo p, entonces $f(x) = g(x) - x$ tiene un cero en p. Si f tiene una raíz p, entonces $g(x) = x - f(x)$ tiene punto fijo p (También $g(x) = x + 5f(x)$ tiene punto fijo p). Hay muchas formas de construir g que tiene punto fijo p.

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingenieria Mecánica

Método del Punto Fijo

1. Transformar la ecuación $f(x) = 0$ en una ecuación equivalente de punto fijo: $x = g(x)$.
2. Tomar una estimación inicial x_0 del punto fijo x^* de g. (x^* punto fijo de g si $g(x^*) = x^*$).
3. Para $k = 1, 2, 3, \ldots$ hasta que converja, iterar $x_{n+1} = g(x_n)$.

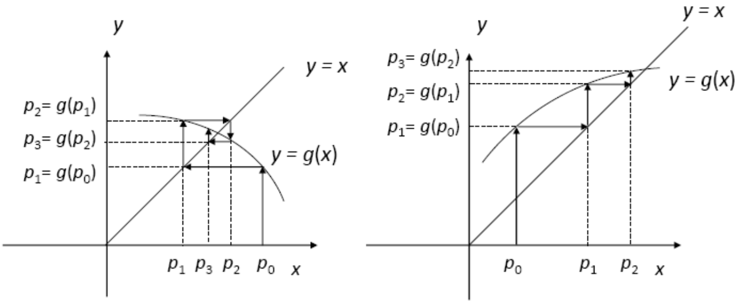
Teorema (Sobre la existencia y unicidad del punto fijo)

a) *Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces g tiene un punto fijo en $[a, b]$.*

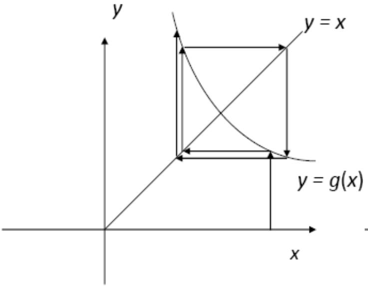
b) *Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, g' existe en todo punto de $\langle a, b \rangle$ y existe $k \in \langle 0, 1 \rangle$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in \langle a, b \rangle$. Entonces el punto fijo de g en $[a, b]$ es único.*

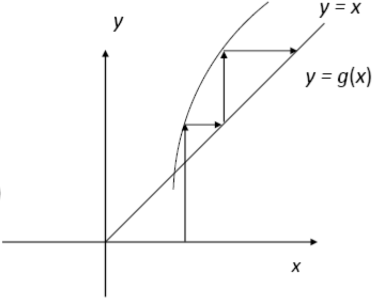
Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingenieria Mecánica

Convergencia



Divergencia





Ejemplos

Ejemplo

Verificar si la función $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$ *cumple las condiciones del teorema en el intervalo* $[-1, 1]$*; en el intervalo* $[3, 4]$*. Calcular los puntos fijos de* g*.*

Ejemplo

Considere la función $f(x) = x^5 + x - 1$ *en el intervalo* $[0, 1]$*. Construir una función* g *que cumpla con las condiciones del teorema y que tenga el punto fijo* p*. Probar las siguientes funciones*

- $g(x) = 1 - x^5$
- $g(x) = \dfrac{1}{x^4 + 1}$
- $g(x) = \sqrt[5]{1 - x}$

Teorema

Teorema (Iteración de punto fijo)

Sea $g \in C[a,b]$ tal que $g(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$, existe g' en $\langle a,b\rangle$ y existe $k \in \langle 0,1\rangle$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in \langle a,b\rangle$. Entonces, para cualquier número $p_0 \in [a,b]$, la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$\boxed{p_n = g(p_{n-1}), \qquad n \geq 1}$$

converge al punto fijo de la función g en $[a,b]$. Presentado como cota de error

$$\boxed{|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_0 - p_1|, \qquad n \geq 1}$$

Ejemplo

Usar el método del punto fijo para aproximar las raices de $f(x) = x^2 - 2x - 3$, comenzando con $x_0 = 4$.

Solución:

Existen muchas formas de cambiar la ecuación $f(x) = 0$ a la forma $x = F(x)$, efectuando manipulaciones algebraicas simples.

Para el ejemplo, sea:

$$x = F(x) = \sqrt{2x + 3}$$

Evaluamos la función F en un punto inicial x_0

$x_1 = F(x_0) = F(4) = 3.31662$

$x_2 = F(x_1) = F(3.31662) = 3.03439$

Método de Newton

El método de Newton-Raphson, también llamado sencillamente método de Newton, es el método más famoso para hallar los ceros de una función. A diferencia del método de la bisección, necesita que se evalúe la derivada $f'(x)$ además de la propia función.

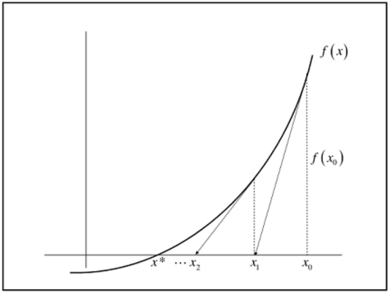
- Es lejos uno de los métodos más usados para resolver ecuaciones.
- A partir de una estimación inicial x_0 se efectúa un desplazamiento a lo largo de la tangente hacia su intersección con el eje x, y se toma ésta como la siguiente aproximación.

Interpretación Geométrica

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

Cuando $y = 0, x = x_{n+1}$ o sea



$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

o

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Continuación...

Más concretamente el método de Newton consiste en generar las sucesión

$$\left\{ x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right\}_{i=0}^{\infty}$$

a partir de un valor x_0 dado.
Si denotamos

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Estamos en presencia de un caso particular del método del Punto Fijo.

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingenieria Mecánica

Ejemplo

Ejemplo

Aproximar la solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ *utilizando el método de Newton,* $x_0 = 1, \; x_0 = 3$

$$\boxed{x^2 - 4 = 0}$$

$x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0{}^2 - 4)}{2x_0}$$

$$x_1 = 1 - \frac{(1^2 - 4)}{2*1} = 1.5$$

$$x_2 = 1.5 - \frac{(1.5^2 - 4)}{2*1.5} = \frac{23}{12}$$

$x_0 = 3$

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0{}^2 - 4)}{2x_0}$$

$$x_1 = 3 - \frac{(3^2 - 4)}{2*3} = 2.1666$$

$$x_2 = 2.1666 - \frac{(2.1666^2 - 4)}{2*2.1666} = 2,006$$

Propiedad

Propiedad

Si la función $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ *definida en* $[a, b]$ *toma valores en* $[a, b]$, *es de clase* $C^1([a, b])$ *y además:*

$$|g'(x)| = \left| \frac{f''(x).f(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1, \qquad \forall x \in [a, b]$$

entonces la sucesión dada por $\left\{ x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right\}_{i=0}^{\infty}$ *obtenida a partir de cualquier punto* $x_0 \in [a, b]$ *converge hacia la única solución de la ecuación* $f(x) = 0$ *en* $[a, b]$.

Sistema de ENL

Dada la función

$$
\begin{array}{rccc}
F: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\
 & (x_1, \ldots, x_2) & \longrightarrow & (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))
\end{array}
$$

El objetivo es determinar una solución $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ del sistema de n ecuaciones con n incognitas

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
f_1(x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \\
\vdots & & \\
f_n(x_1, \ldots, x_n) & = & 0
\end{array}
\right.
$$

En su forma matricial

$$F(x) = 0$$

con

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La resolución de sistemas de ecuaciones no lineales por procesos analíticos puede ser bastante difícil o imposible. En ese caso tenemos la necesidad de utilizar métodos numéricos para obtener una solución aproximada. Consideraremos los siguientes métodos iterativos:

- Método del Punto Fijo
- Método de Newton

Método del Punto Fijo

Fórmula de recurrencia

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde

$$G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}$$

que determina una sucesión de aproximaciones para una raíz x^* de la ecuación $F(x) = 0$, a partir de una aproximación inicial

$$x = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Definiciones

Definición

- *Norma 1:* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- *Norma 2 o norma euclidiana:* $\forall x \in \mathbb{R}^n$,
  $$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$
- *Norma Infinita:*$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad ||x||_\infty = max_{1\leq i\leq n}|x_i|$.

Método de Newton

Formula de recurrencia:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}) \quad k = 0, 1, \ldots,$$

donde

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Dado el sistema no lineal

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &= e^{-x_1} \\
-x_1 + 2x_2 &= e^{-x_2}
\end{aligned}
$$

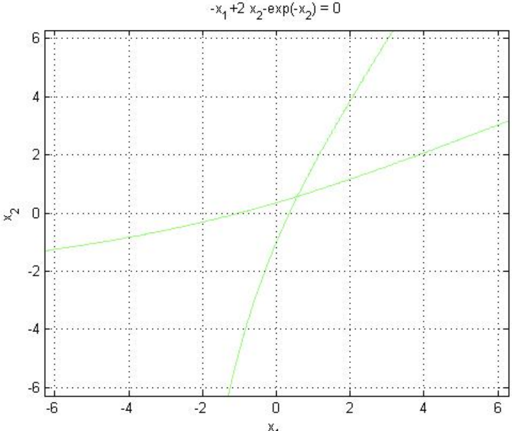
Se pide:

1. *Localizar gráficamente las raices.*
2. *Aproximar la solución utilizando el método de Newton. Considerar* $x^{(0)} = [0.5 \;\; 1]^T$. *Hallar el error cometido.*
3. *Aproximar la solución utilizando el método del Punto Fijo. Considerar* $x^{(0)} = [0.5 \;\; 1]^T$. *Hallar el error cometido.*

Solución

Arreglando:

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 - e^{-x_1} = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 - e^{-x_2} = 0$$



Continuación...

Solucion: (2)

$$F(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - e^{-x_1} \\ -x_1 + 2x_2 - e^{-x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)})$; $J_F(x) = \begin{bmatrix} 2 + e^{-x_1} & -1 \\ -1 & 2 + e^{-x_2} \end{bmatrix}$

$\Delta = 3 + 2(e^{-x_1} + e^{-x_2}) + e^{-x_1 - x_2}$

$$J_F^{-1}(x) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 2 + e^{-x_2} & 1 \\ 1 & 2 + e^{-x_1} \end{bmatrix}$$

Continuación...

Iteración:1

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0.6065 \\ 1.1321 \end{bmatrix}$$

$$J_F^{-1}(x^{(x_0)}) = \begin{bmatrix} 0.4578 & 1.934 \\ 0.1934 & 0.5040 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x^{(0)}} - \underbrace{\begin{bmatrix} -0.0588 \\ 0.4533 \end{bmatrix}}_{\Delta x^{(0)}}$$

Error$=||\Delta x^{(0)}|| = 0.4533$

Continuación...

Solución: 3

Algoritmo del Punto Fijo:

$$x_1 = \frac{x_2 + e^{-x_1}}{2} = g_1(x_1, x_2)$$

$$x_2 = \frac{x_1 + e^{-x_2}}{2} = g_2(x_1, x_2)$$

$$G(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Prueba de la convergencia:

$$J_G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{[0.5,1]} = \begin{bmatrix} -0.3033 & 0.5 \\ 0.5 & -0.1839 \end{bmatrix}$$

Continuación...

$||J_G||_\infty = 0.8033$. Por lo tanto Converge.

$$x_1^{(k+1)} = \frac{x_2^{(k)} + e^{-x_1^{(k)}}}{2}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{x_1^{(k)} + e^{-x_2^{(k)}}}{2}$$

Primera Iteración:

$x^{(0)} = [0.5 \;\; 1]^T$

$$x_1^{(1)} = \frac{1 + e^{-0.5}}{2} = 0.8033$$

$$x_2^{(1)} = \frac{0.5 + e^{-1}}{2} = 0.4339$$

$$x^{(1)} = [0.8033 \;\; 0.4359]$$