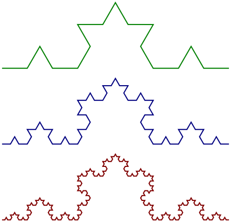
Sistema de Ecuaciones Lineales

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ingenieria Industrial



Métodos Computacionales

Agenda

Introducción

Introducción

Nociones Elementales

Solución de un Sistema Lineal

SEL

Teorema Rouché-Frobenius

Ejemplos

Aplicaciones de los Sistemas Lineales

La solución de sistemas lineales de ecuaciones lineales es un tema clásico de las matemáticas, rico en ideas y conceptos y de gran utilidad en diversas ramas del conocimiento como la biología, física, psicología, economía, etc. La resolución de sistemas de casi cualquier número de ecuaciones (10, 100, 1000, etc) es una realidad hoy en dia gracias a las computadoras, lo cual proporciona un atractivo especial a las técnicas de solución directa e iterativas.

- Una red eléctrica.
- Una red de calles.
- La ecuación del calor.

Nociones Elementales de Matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A = [a_{ij}] \qquad a_{ij}: \; i = i \dots m; \; j = 1 \dots n$

A es de orden $m \times n$; si $m = n$ A se dice que es una matriz cuadrada. **Para matrices cuadradas de orden n:**

- $D = [d_{ij}]$ Matriz diagonal si $d_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$
- Además si $d_{ii} = 1$, se llama matriz identidad I.
- $U = [u_{ij}]$ es una matriz triángular superior cuando $u_{ij} = 0$, para todo $i > j$
- $L = [l_{ij}]$ es una matriz triángular inferior cuando $l_{ij} = 0$, para todo $i < j$

Solución de un Sistema Lineal

Escribiremos un **sistema lineal de** m **ecuaciones con** n **incógnitas** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \right. \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

A : Matriz de coeficientes;
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, n_n)^T$
Sistema Homogéneo (No Homogéneo): si $\mathbf{b}$=0 (si $\mathbf{b} \neq 0$)

Teorema de Rouché -Frobenius

Teorema (Rouché-Frobenius)

$$\textit{Sistema Compatible}\begin{cases}\textbf{\textit{Compatible Determinado}}\\ \textit{Si } rang(A)=rang(A|b)=n\\ \textbf{\textit{Compatible Indeterminado}}\\ rang(A)=rang(A|b)<n\end{cases}$$

$$\textit{Sistema Incompatible}\begin{cases}\textbf{\textit{No tiene Solución}}\\ \textit{Si } rang(A)\neq rang(A|b)\end{cases}$$

Rango(A) es el máximo numero de columnas (o filas) de A linealmente independientes. El rango puede ser encontrado usando OF (Operaciones elementales entre filas) ó OC (Operaciones elementales entre columnas).

Operaciones Elementales de filas (OF)

Las siguientes operaciones aplicadas a la matriz aumentada $[A|b]$, producen un sistema lineal equivalente.

Intercambios: El orden de dos filas pueden ser cambiada

Escalado: Multiplicando un fila por una constante no cero

Reemplazo: Las filas pueden ser reemplazadas por la suma de esa fila y un múltiplo distinto a cero de cualquier otra fila.

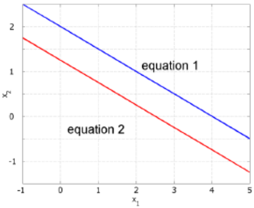
Un Ejemplo Incompatible

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicar la primera fila por -2 y sumar la segunda fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Rank{A}=1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$ Rank{A|b}=2



Entonces este sistema de ecuaciones no es soluble

Unicidad de las soluciones

- El sistema tiene solución única si solo si Rango(A)=Rango(A| b)=n; n es el orden de la matriz.
- Tales sistemas son llamados sistema rango completo (full-rank).

Sistemas rango completo (Full-rank)

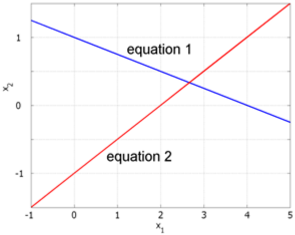
Si Rango(A)=n; Det(A)$\neq$ 0 entonces A es no singular por lo tanto invertible.

Un Ejemplo Compatible determinado

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rank{A}=Rank{A|b}=2

Consistente solución única



Matrices de rango deficiente

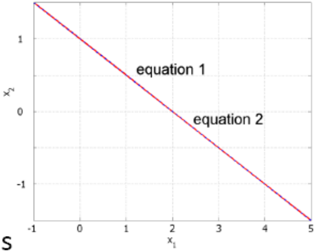
Si $Rango(A) = m < n$
Det(A) $=$ 0 entonces A es singular por lo tanto no es invertible el sistema tiene un número infinito de soluciones (n-m variables libres)

Un Ejemplo Compatible indeterminado

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Rank{A}=Rank{A|b}=1<2

Consistente Infinitas Soluciones



Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ingenieria Industrial

Sistema de ecuaciones mal condicionadas

Una pequeña desviación en las entradas de la matriz A, causa una gran desviación en la solución.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.48 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.47 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.49 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.47 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se observa entonces que un cambio ”pequeño” en uno de los datos (coeficientes y términos independientes) ha producido un cambio ”grande” en la solución, es decir, la solución del sistema perturbado es ”muy diferente” de la solución del sistema original. Los anteriores son ejemplos de problemas mal condicionados. Un problema se dice bien condicionado si ”pequeños” cambios en los datos introducen, correspondientemente, un cambio ”pequeño” en la solución. El buen o mal condicionamiento de un problema es inherente al problema y no depende del algoritmo empleado para resolverlo.

Definición

Definición

*Si X es la solución exacta de un sistema lineal $AX = b$, A invertible, $b \neq 0$, y $\tilde{X}$ es una solución aproximada de dicho sistema, entonces llamamos **vector error** de $\tilde{X}$ con respecto a X al vector E definido por*

$$E = \tilde{X} - X$$

y vector error residual correspondiente a la solución aproximada $\tilde{X}$, al vector r definido por

$$r = \tilde{b} - b \qquad ; \tilde{b} = A\tilde{X}$$

Norma Vectorial

Una norma vectorial en R^n es una función $||.||$, de R^n en R con las siguientes propiedades:

- $||x|| \geq 0$ para todo $x \in R^n$.
- $||x|| = 0$ si y solo si $x = (0, 0, ..., 0)^t$.
- $||ax|| = |a|||x||$ para todo $a \in R$ y $x \in R^n$.
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ para todo $x, y \in R^n$.

Para nuestro proposito sólo necesitaremos dos normas específicas de R^n

Vector en R^n

El vector

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Se denotará por: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$

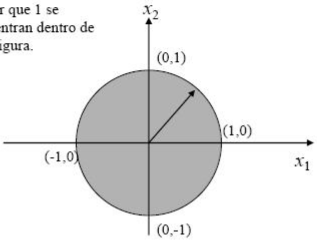
Definiciones

Norma l_2 y l_∞

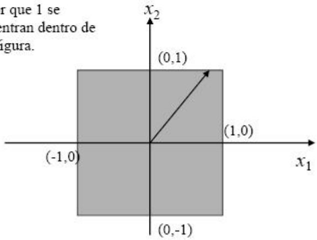
La norma l_2 o norma euclidiana se define como $$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2}$$

La norma l_∞ se define como $$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Los vectores en R^2 con la norma l_2 menor que 1 se encuentran dentro de esta figura.



Los vectores en R^2 con la norme l_∞ menor que 1 se encuentran dentro de esta figura.



Ejemplo

Ejemplo

El vector $x = (-1, 1, -2)^t$ *en* R^3 *tiene normas*

$$||x||_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$||x||_\infty = max\{|-1|, |1|, |-2|\} = 2$$

Definiciones

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ son vectores en R^n las distancias l_2 y l_∞ entre x e y están definidas por

$$||x - y||_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right\}^{\dfrac{1}{2}}$$

$$||x - y||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Norma Matricial

Una norma matricial en $R^{n\times n}$ es una función $||.||$, de $R^{n\times n}$ en R con las siguientes propiedades:

- $||A|| \geq 0$ para todo $A \in R^{n\times n}$.
- $||A|| = 0$ si y solo si A es 0.
- $||\alpha A|| = |\alpha|||A||$ para todo $\alpha \in R$ y $A \in R^{n\times n}$.
- $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$ para todo $A, B \in R^{n\times n}$.
- $||AB|| \leq ||A||||B||$

Teorema (Norma Matricial)

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times n$, entonces

$$||A||_\infty = max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

Teorema

Si A es una matriz invertible, se verifica

1. $||\tilde{X} - X|| \leq ||r||||A^{-1}||$
2. $\dfrac{||\tilde{X} - X|}{||X||} \leq ||A|||A^{-1}|||\dfrac{||r||}{||b||}$

Condicionamiento de un sistema lineal

Definición

Se denomina número de condicionamiento de una matriz al número

$$k(A) = ||A||||A^{-1}||$$

Si $k(A)$ es pequeño, se dice que la matriz A está bien condicionada, si es grande que A está mal condicionada.

Ejemplo

Ejemplo

Averiguar si la matriz A está bien condicionada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10.05 & 10 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{-0.5} \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -10.05 & 1 \end{pmatrix}$$

$||A||_\infty = \text{Max}\{|1| + |1|, |10.05| + |10|\} = 20.05$

$||A^{-1}|| = \frac{1}{0.05} || \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -10.05 & 1 \end{pmatrix} || = \frac{1}{0.05} 11.05 = 221$

Luego:

$\text{Cond}(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty = (20.05)(221) = 4431.05 >> 1$

Técnicas de Solución

- Métodos de solución Directos
  - Encuentra una solución en un número finito de operaciones transformando el sistema en un sistema equivalente que sea más fácil de solucionar.
  - Triángulares , diagonales
- Métodos de solución Iterativos
  - Calcula aproximaciones sucesivas, comenzando en un vector inicial x_0.
  - Total de iteraciones incierta, pueda que no converja.