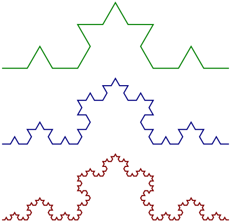
SEL Métodos Iterativos

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ingenieria Industrial



Métodos Computacionales

Agenda

Introducción

La ventaja frente a los métodos directos es que son menos sensibles a los errores de redondeo y esto se aprecia en sistemas de orden elevado donde los errores de redondeo de los métodos directos son considerables.

Método Iterativo

Definición de Método Iterativo

Un método iterativo construye una sucesión de vectores $x^{(k)}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$$

siendo x la solución del sistema $Ax = b$.

Construcción de un método iterativo

Se parte de una aproximación inicial $x^{(0)}$ y luego se calcula

$$x^{(k+1)} = F(x^{(k)}) \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

donde F se toma de forma lineal: $F(x) = Tx + c$.

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

La matriz T se denomina matriz de iteración.

Diferentes Métodos Iterativos

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel

Método de jacobi

El método Jacobi es el método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales más simple y se aplica sólo a sistemas cuadrados, es decir a sistemas con tantas incógnitas como ecuaciones.

Método de Jacobi

$$
\begin{aligned}
a_{11}\boxed{x_1} + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}\boxed{x_2} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}\boxed{x_n} &= b_n
\end{aligned}
\qquad
x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}
$$

$$
x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - \cdots - a_{1n}x_n^0)
$$

$$
x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k \right]
$$

$$
x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - \cdots - a_{2n}x_n^0)
$$

$$
x_n^1 = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^0 - a_{n2}x_2^0 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^0)
$$

Forma Matricial

Sea el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trabajamos sobre la siguiente partición de A:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Continuación...

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \vdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

De tal forma que:

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$T_j = D^{-1}(L+U)$, Matriz de Iteración de Jacobi
$c = D^{-1}b$

Ejemplo

Ejemplo

Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aproximar la solución utilizando el método de Jacobi.
$x_1^0 = 0$ y $x_2^0 = 0$

Convergencia

Definición

A es de diagonal estrictamente dominante si para cada fila i se cumple:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1; j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Una matriz se dice matriz diagonalmente dominante, si en cada uno de los renglones, el valor absoluto del elemento de la diagonal principal es mayor que la suma de los valores absolutos de los elementos restantes del mismo renglón. A veces la matriz de un sistema de ecuaciones no es diagonalmente dominante pero cuando se cambian el orden de las ecuaciones y las incógnitas el nuevo sistema puede tener matriz de coeficientes diagonalmente dominante.

Convergencia

Teorema

Si A es una matriz diagonalmente estrictamente dominante, entonces la iteración de Jacobi converge para cualquier valor inicial

En ciertas ocasiones al aplicar Jacobi la matriz no es diagonalmente dominante y por tanto no existirá garantía de convergencia. Sin embargo, en algunos casos será posible reordenar las incógnitas en otra manera de forma que la nueva matriz de coeficientes sea diagonalmente dominante. Esto se puede detectar revisando todos los posibles ordenamientos de las incógnitas y ver cómo es la matriz resultante. Claro que esto conlleva un bueno número de pruebas pues el número posible de ordenamientos en n variables es $(n-1)!$ pero cuando n es reducido es sencillo.

Definición (Polinomio Característico)

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Definición (Espectro)

Se llama espectro "ξ" de la matriz A al conjunto de soluciones de la ecuación $P(\lambda) = 0$

Definición (Radio Espectral)

Radio espectral de la matriz A: $\rho(A) = Max\{|\lambda|\}, \ \lambda \in \xi$

Teorema

La sucesión $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$, *para* $k \geq 0$ *converge a la solución única* $x = Tx + c$ *si y sólo si* $\rho(T) < 1$.

Ejemplo

Analizar la convergencia del siguiente sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & -3 \end{array}$$

El método de Gauss-Seidel es muy semejante al método de Jacobi. Mientras que en el de Jacobi se utiliza el valor de las incógnitas para determinar una nueva aproximación, en el de Gauss-Seidel se va utilizando los valores de las incógnitas recien calculados en la misma iteración, y no en la siguiente.

Método de Gauss Seidel

Use lo último al actualizar

$$\begin{aligned} a_{11}\boxed{x_1} + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\boxed{x_2} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}\boxed{x_n} &= b_n \end{aligned}$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

$$x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - \cdots - a_{1n}x_n^0)$$

$$x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0 - \cdots - a_{2n}x_n^0)$$

$$x_n^1 = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^1 - a_{n2}x_2^1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^1)$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\right]$$

Ejemplo

Ejemplo

Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aproximar la solución utilizando el método de Gauss Seidel.
$x_1^0 = 0$ y $x_2^0 = 0$

Forma Matricial

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U x^{(k)} + (D - L)^{-1} b$$

$T_{gs} = (D - L)^{-1} U$, Matriz de Iteración de Gauss Seidel
$c = (D - L)^{-1} b$

Teorema

Si A es una matriz diagonalmente estrictamente dominante, entonces la iteración de Guass Seidel converge para cualquier valor inicial