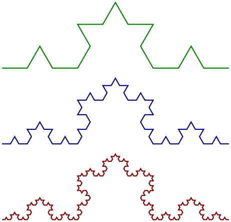
SEL Métodos Directos

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingenieria
Facultad de Ingenieria Mecánica



Métodos Numérico

Agenda

Métodos Directos

- Generalidades sobre Métodos Directos
- Eliminación Gaussiana
- Pivoteo
- Factorización LU

Generalidades sobre métodos directos

- Encuentra una solución en un número finito de operaciones(en ausencia de errores de redondeo) transformando el sistema en un sistema equivalente que sea "más fácil" de solucionar.
- Triangulares (Superior o Inferior), Diagonales, .

Eliminación Gaussiana

- Usando Operaciones Elementales por Renglones (OER), la matriz A es transformada en una matriz triangular superior (todos los elementos debajo de la diagonal son cero).
- Sustitución hacia atrás es usada para resolver un sistema triangular superior

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
\underset{\text{OER}}{\Rightarrow}
\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{a}_{ii} & \cdots & \tilde{a}_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_i \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}
$$

Sustitución Regresiva

Eliminación Gaussiana

Primer Paso de Eliminación

Elemento pivotal

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}^{(1)}} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_{2,1} &= a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \\ m_{3,1} &= a_{31}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \\ &\vdots \\ m_{n,1} &= a_{n1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

Segundo Paso de Eliminación

Elemento Pivotal

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \boxed{a_{22}^{(2)}} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} m_{3,2} = a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)} \\ \vdots \\ m_{n,2} = a_{n2}^{(2)} / a_{22}^{(2)} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

Eliminación Gaussiana

Sustitución Regresiva

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1n-1}^{(n)} & a_{n-1n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(n-1)} \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \qquad x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1n-1}^{(n-1)}}\left[b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1n}^{n-1} x_n\right]$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}}\left[b_i^{(i)} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}^{(i)} x_k\right] \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Ejemplo

Ejemplo

Utilizando Eliminación Gaussiana resolver:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

Ejemplo

Método de Eliminación Gaussiana

- Sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3x_1 + \quad 2x_2 + \quad 4x_3 = 1 \\ \qquad 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ \qquad\qquad - \quad 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Solución: $x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pivoteo

- Computadoras usan **precisión aritmética finita**.
- Pequeños errores son introducidos en cada operación aritmética, **propagación de errores**
- Cuando los elementos pivotales son muy pequeños, los multiplicadores podrían ser muy grandes.
- La adición de números de magnitud diferente puede conducir a la pérdida de significación.
- Para reducir el error, se realiza intercambio de filas para maximizar la magnitud del elemento pivotal.

Pivoteo

Ejemplo (Sin Pivoteo)

aritmética 4-digit
$$\begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 24.14 & -1.210 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.414 \\ 22.93 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{24.14}{1.133} = 21.31 \qquad \begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 0.000 & -113.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.414 \\ -113.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9956 \\ 1.001 \end{bmatrix}$$

Pérdida de precisión

Ejemplo (Con Pivoteo)

$$\begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 \\ 1.133 & 5.281 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.93 \\ 6.414 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{1.133}{24.14} = 0.04693 \qquad \begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 \\ 0.000 & 5.338 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.93 \\ 5.338 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Procedimiento con Pivoteo

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1i}^{(1)} & \cdots & a_{1j}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2i}^{(2)} & \cdots & a_{2j}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3i}^{(3)} & \cdots & a_{3j}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{(i)} & \cdots & a_{ij}^{(i)} & \cdots & a_{in}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ji}^{(i)} & \cdots & a_{jj}^{(i)} & \cdots & a_{jn}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ni}^{(i)} & \cdots & a_{nj}^{(i)} & \cdots & a_{nn}^{(i)}
\end{bmatrix}
$$

Parte Eliminada

Fila Pivotal

Columna Pivotal

1

Pivoteo por Filas

- Más comúnmente llamado procedimiento de pivoteo parcial.
- Busque la columna pivotal.
- Encuentre el mas grande elemento en magnitud.
- Luego intercambie esta fila con la fila pivotal.

Pivoteo por Filas

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1i}^{(1)} & \cdots & a_{1j}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2i}^{(2)} & \cdots & a_{2j}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3i}^{(3)} & \cdots & a_{3j}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{(i)} & \cdots & a_{ij}^{(i)} & \cdots & a_{in}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ji}^{(i)} & \cdots & a_{jj}^{(i)} & \cdots & a_{jn}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ni}^{(i)} & \cdots & a_{nj}^{(i)} & \cdots & a_{nn}^{(i)}
\end{bmatrix}
$$

Intercambio de filas

El más grande en magnitud

Ejemplo de Pivoteo por Filas

En la etapa k, escoger para pivote el elemento de mayor módulo entre a_{ik}, i=k,k+1,...,n;

Para $n = 4$ ***, k = 2, tenemos*** $\max_{i \geq 2} |a_{i2}| = 3$

$\Rightarrow \; pivote = a_{32} = -3$

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Pivoteo Completo

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1i}^{(1)} & \cdots & a_{1j}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2i}^{(2)} & \cdots & a_{2j}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3i}^{(3)} & \cdots & a_{3j}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{(i)} & \cdots & a_{ij}^{(i)} & \cdots & a_{in}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ji}^{(i)} & \cdots & a_{jj}^{(i)} & \cdots & a_{jn}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ni}^{(i)} & \cdots & a_{nj}^{(i)} & \cdots & a_{nn}^{(i)}
\end{bmatrix}
$$

Intercambie estas filas

Más grande en magnitud

Intercambie estas columnas

Ejemplo de Pivoteo Completo

$$\textbf{\textit{Para}}\ n=4\ \textbf{\textit{e}}\ \textbf{k}=\textbf{2,}\ \textbf{\textit{tenemos}}\quad \max_{i,j\geq 2}|a_{ij}|=7\ \Rightarrow\ pivo=a_{34}=7$$

$$A^{(1)}|b^{(1)}=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Luego, intercambiamos las filas 2 y 3 y las columnas 2 y 4:

$$A^{(1)}|b^{(1)}=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

Algoritmo de la factorización LU

Descomposición de una matriz como producto de dos triangulares

Supongamos que la matriz de un sistema $Ax = b$ se puede descomponer como $A = LU$, con L triángular inferior y U triangular superior.

$$LUx = b, \Leftrightarrow \quad Ly = b, \quad Ux = y$$

Teorema

Una matriz cuadrada A es factorizable LU si y solo si en el algoritmo de Gauss para encontrar una matriz escalonada por filas que sea equivalente por filas a la matriz A no es necesario aplicar operaciones elementales (de filas).

Diferentes Formas de Factorización

- Forma de Doolittle

  Obtenida por
  Eliminación Gaussiana

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

- Form de Crout

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Form de Choleski

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma de Crout

- Cálculo de la primera columna de L $\quad l_{i1} = a_{i1}$
- Cálculo de la primera fila de U $\quad u_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{l_{11}}$
- Cálculo alternado de las columnas de L y filas de U

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum a_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \qquad j \leq i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum a_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}} \quad i \leq j, \quad j = 2, 3, \ldots, n$$

Crout

Secuencia de la reducción de Crout

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una entrada de la matriz A es usada <u>solamente una vez</u> para calcular la Correspondiente entrada de las matrices L o U .Así las columnas de L y las filas de U pueden ser almacenadas en la matriz A

Descomposición de Cholesky

Descomposición de Cholesky. Sea A una matriz simética y definida positiva, existe una única matriz triangular inferior L con $l_{ii} > 0$ tal que

$$A = LL^T$$

Esto es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Descomposición de Cholesky

Note que

- $$a_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

  l_{11} es un número real positivo ya que $a_{11} > 0$ por que A es definida positiva.

- $$a_{i1} = l_{i1} l_{11} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$$

Descomposición de Cholesky

- Como

$$a_{ij} = l_{i1} l_{j1} + l_{i2} l_{j2} + \ldots + l_{ij} l_{jj}; \qquad j = 1, 2, \ldots, i-1$$

luego

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum a_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}; \qquad j = 1, 2, \ldots, i-1$$

Descomposición de Cholesky

- Además

$$a_{ii} = l_{i1}^2 + \ldots + l_{ii}^2$$

lo que implica

$$l_{ii} = \left[a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Descomposición de Cholesky-MatLab

```
function l=cholesky(a)
n=length(a);
for i=1:n
   for j=1:i-1
      l(i,j)=a(i,j);
      for k=1:j-1
         l(i,j)=l(i,j)-l(i,k)*l(j,k);
      end
      l(i,j)=l(i,j)/l(j,j);
   end
   l(i,i)=a(i,i);
   for k=1:i-1
      l(i,i)=l(i,i)-l(i,k)^ 2;
   end
   l(i,i)=sqrt(l(i,i));
end
```

Ejemplo:

Ejemplo

Dada la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

Factorizar utilizando descomposición de Cholesky.

Solución:

A es simetrica y definida positiva, en efecto:

$det(6) > 0$;

$$det \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} = 105 > 0$$

$det(A) = 3920 > 0$

Continuación

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{15}{2.4495} = 6.1237 \qquad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}{}^{2}} = \sqrt{55 - (6.1237)^{2}} = 4.1833$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = 22.454 \qquad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = 20.916$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}{}^{2} - l_{32}{}^{2}} = 6.1106$$

$$L = \begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.1237 & 4.1833 & 0 \\ 22.454 & 20.916 & 6.1106 \end{bmatrix}$$