



SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL

1.- Resolver las siguientes integrales indefinidas

$$a) \int \frac{(x^7 + x^3)dx}{x^{12} - 2x^4 + 1}$$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$$

Solución:

(a)

$$I = \int \frac{(x^7 + x^3)dx}{x^{12} - 2x^4 + 1} = \int \frac{(x^3(x^4 + 1))dx}{x^{12} - 2x^4 + 1} = \frac{1}{4} \int \frac{(4x^3(x^4 + 1))dx}{x^{12} - 2x^4 + 1}$$

Cambio de variable: $u = x^4$; $du = 4x^3$

$$\frac{1}{4} \int \frac{(u + 1)du}{u^3 - 2u + 1} = \frac{1}{4} \int \frac{(u + 1)du}{(u - 1)(u^2 + u - 1)}$$

$$\int \frac{(u + 1)du}{(u - 1)(u^2 + u - 1)} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{C}{u + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$A = \frac{u + 1}{(u + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})(u + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})} \Big|_{u=1} = 2$$

$$B = \frac{u + 1}{(u - 1)(u + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})} \Big|_{u=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{4\sqrt{5}}{10} - 1$$

$$C = \frac{u + 1}{(u - 1)(u + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})} \Big|_{u=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} = -\frac{4\sqrt{5}}{10} - 1$$

$$I = \frac{\ln|x^4-1|}{2} + (-\frac{\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{4})(\ln|x^4 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}|) + (\frac{\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{4})(\ln|x^4 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}|) + C$$

$$I = \frac{\ln|x^4-1|}{2} - \frac{\ln|x^8+x^4-1|}{4} - \frac{\sqrt{5}}{10} \ln\left(\frac{x^4+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x^4+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right) + C$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x \cos^4 x}} = \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{\tan x}} \\ &= \frac{\sqrt{\tan x}}{2} + C \end{aligned}$$

2.- La función f definida y continua para todo número real x , satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + (e^{\frac{\pi x^2}{2}})(\sin(\frac{\pi x}{2}))(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}$$



Calcular

$$E = \int_0^1 (x^2 + 1)f(x)dx + \int_{-1}^1 \frac{2x + \tan x}{1 + x^2} dx$$

Solución:

$$\int_0^1 (x^2 + 1)f(x)dx = \int_0^1 x^2 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$

Haciendo $x = 0$ en la ecuación dada

$$0 = \int_0^1 t^2 f(t)dt - \frac{1}{2} \rightarrow \int_0^1 t^2 f(t)dt = \frac{1}{2}$$

Haciendo $x = 1$ en la ecuación dada

$$\int_0^1 f(t)dt = e^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 (x^2 + 1)f(x)dx = \left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Además, en la integral:

$$\int_{-1}^1 \frac{2x + \tan x}{1 + x^2} dx$$

$2x$: función impar

$\tan x$: función impar

$1 + x^2$: función par

Luego: $\frac{2x + \tan x}{1 + x^2}$: función impar

Por lo tanto:

$$\int_{-1}^1 \frac{2x + \tan x}{1 + x^2} dx = 0$$

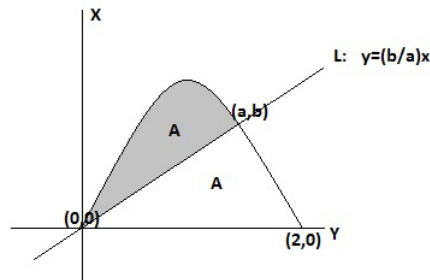
Finalmente:

$$E = \left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$



3.- Si el área de la región plana comprendida entre la parábola $y = 12x - 6x^2$ y el eje X es dividida en 2 partes iguales por una recta L que pasa por el origen de coordenadas. Hallar la ecuación de la recta L .

Solución:



$$2A = \int_0^2 (12x - 6x^2) dx = 8 \rightarrow A = 4$$
$$4 = \int_0^a (12x - 6x^2 - \frac{b}{a}x) dx = 6a^2 - 2a^3 - \frac{ab}{2}; \quad b = 12a - 6a^2$$
$$4 = 6a^2 - 2a^3 - 6a^2 + 3a^3 \rightarrow a^3 = 4$$
$$a = \sqrt[3]{4}; \quad b = 12\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{16}$$

$$y = 6(2 - \sqrt[3]{4})x$$

4.- a) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

b) Determina, aplicando algún criterio de convergencia (sin calcular), si la siguiente integral impropia es convergente o divergente

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4(1 + \ln x)} dx$$

Solución:



(a)

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan e^x \Big|_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctan 1 - \arctan e^a) + \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan e^b - \arctan 1) \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$1 < x \rightarrow 0 < \ln x \rightarrow \frac{1}{\ln x} > 0$$

$$1 + \frac{1}{\ln x} > 1 \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln x}} < 1$$

$$\frac{1}{x^4(1 + \frac{1}{\ln x})} < \frac{1}{x^4}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx \quad \text{Es Convergente}$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^4(\ln x + 1)} dx \quad \text{Es Convergente}$$

5.- Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región acotada por la gráfica $y = x^{3/2}$, la recta $x = 4$ y el eje X alrededor de la recta $x = 4$.

Solución:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 (4-x)(x^{3/2}) dx = 2\pi \int_0^4 (4x^{3/2} - x^{5/2}) dx \\ &= 8\pi \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} \right) \Big|_0^4 - 2\pi \left(\frac{x^{7/2}}{7/2} \right) \Big|_0^4 = \frac{1024\pi}{35} \end{aligned}$$