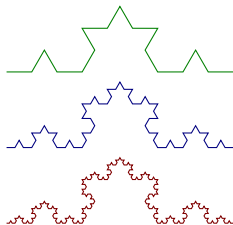


Funciones Vectoriales

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica



Cálculo Vectorial

Agenda



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Longitud de Arco

Reparametrización de una Curva

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y Torsión

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Curvatura

Torsión

Torsión

Longitud de Arco



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Teorema

Si C es una curva suave dada por

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, en un intervalo $[a, b]$, entonces la longitud de arco de C en el intervalo es

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Ejemplo

Hallar la longitud de arco de la hélice circular

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ desde el punto $(1, 0, 0)$ al punto $(1, 0, 2\pi)$

3 Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

Parametro Longitud de Arco



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Para estudiar las propiedades geométricas de una curva, el parámetro adecuado es a menudo la longitud de arco S .

Definición

Sea C una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$ definida en $[a, b]$, la función longitud de arco está dado por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad \forall t \in [a, b]$$

A la longitud de arco s se llama parametro longitud de arco.

Notación:

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

4 Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios
Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura
Torsión



Ejemplo

Sea C una curva descrita por la función

$\mathbf{r}(t) = (3 - 3t, 4t)$, $0 \leq t \leq 1$, describir la curva C en términos de la longitud de arco.

Nota:

Si t es cualquier parametro tal que $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, entonces t es parámetro longitud de arco.

5

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

27



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Ejercicio

Una trayectoria está dada por la función vectorial

$$\mathbf{g}(s) = \left(s - \arctan(s), \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(s^2 + 1), \arctan(s) \right)$$

Determinar si el parametro s es la longitud de arco.

6 Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

Ejercicio



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

7 Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función diferenciable tal que $\forall x \leq 0$

$$F(x) = g(x)A + \frac{1}{g(x)} \int_0^x g'(t)F(t)dt$$

donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable $\forall x \in \mathbb{R}$, / $|g'(x)| = 1$, A constante unitaria. Hallar la longitud de arco de la curva desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Ejercicio



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

8 Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

Una mosca está trepando a lo largo de una alambre helicoidal, de modo que su vector posición es

$$r(t) = (6 \cos(\pi t), 6 \sin(\pi t), 2t), \quad t \leq 0$$

¿En qué punto la mosca chocará con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ y que distancia recorrerá para llegar ahí (suponiendo que inicio cuando $t = 0$)?.

Reparametrización de una Curva



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Definición

Sea C una curva regular parametrizada por $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\phi : J \rightarrow I$, $J, I \subset \mathbb{R}$, una función real sobreyectiva con derivada continua y $\phi'(s) \neq 0 \forall s \in J$. Entonces la función compuesta $\vec{u} = \vec{r} \circ \phi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ se llama **reparametrización de la curva C** la cual también es regular.

Longitud de Arco

9

Reparametrización
de una Curva

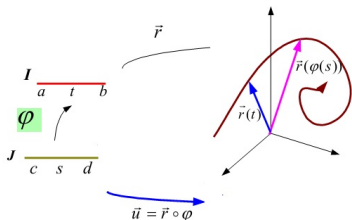
Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión





Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

10 Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

Ejemplo

Reparametrizar la hélice circular

$$C : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t); \quad t \in [0, \pi]$$

a partir de la función real $\phi(s) = \ln s, \quad \forall s \in [1, e^\pi]$

Solución: Definimos la reparametrización de la hélice circular C

$$\mathbf{u}(s) = (\mathbf{ro}\phi)(s)$$

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(\phi(s)) = (\cos(\ln s), \sin(\ln s), \ln s); \quad s \in [1, e^\pi]$$

$$\|\mathbf{u}'(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{s} \text{ rapidez variable}$$

La hélice circular C , se describe con rapidez constante

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2}$$

Vectores Unitarios



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Definición (Vector Tangente Unitario)

Sea C una curva suave representada por

$$\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

El vector tangente unitario denotado por $\mathbf{T}(t)$ en la dirección de $\mathbf{r}'(t)$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

11 Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura
Torsión



Observaciones:

- ▶ La suavidad de C asegura la existencia de \mathbf{T} .
- ▶ El vector \mathbf{T} cambia de dirección en forma muy lenta cuando C se parece a una recta.
- ▶ El vector \mathbf{T}' es ortogonal a \mathbf{T} ,
- ▶ La recta tangente a la curva C esta dada por

$$L_T : \mathbf{r}(t_0) + \lambda \mathbf{T}(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



Definición (Vector Normal Principal)

Sea C una curva suave representada por

$$\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

El vector normal principal unitario denotado por $\mathbf{N}(t)$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| \neq 0$$



Definición (Vector Binormal)

Sea C una curva suave representada por

$$\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

El vector binormal unitario denotado por $\mathbf{B}(t)$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

Componente Tangencial y Normal de la Aceleración



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

15 Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

Teorema (Vector Aceleración)

si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C y $\mathbf{N}(t)$ existe, entonces el vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ se encuentra en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

Componente Tangencial y Normal de la Aceleración



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

16 Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

$$a_T = a \cdot T = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$
$$a_N = a \cdot N = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2}$$

Ejemplo



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

17 Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

Ejemplo

Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración para el vector de posición dado por $r(t) = (3t, -t, t^2)$

Curvatura

Un uso importante del parámetro longitud de arco es hallar la **curvatura**, la medida de cuán agudamente se dobla una curva.

Definición

Sea C una curva suave (en el plano o en el espacio) dada por $\mathbf{r}(s)$, donde s es el parámetro longitud de arco. La curvatura K en s está dada por

$$K = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|$$

Ejemplo

Mostrar que la curvatura de un círculo de radio r es $K = \frac{1}{r}$



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

18 Curvatura

Torsión

27



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

19 Curvatura

Torsión

Ejemplo

Hallar la curvatura de la curva definida por

$$\mathbf{r}(s) = \left(\sin\left(\frac{3}{5}s\right), \cos\left(\frac{3}{5}s\right), \frac{4}{5}s \right)$$



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

20

Curvatura

Torsión

Teorema

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$, entonces la curvatura K de C en t está dada por

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

Ejemplo

Hallar la curvatura de la siguiente curva

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, 3)$$

27



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

21

Curvatura

Torsión

Teorema

Si C es la gráfica de una función dos veces derivable $y = f(x)$, entonces la curvatura K en el punto (x, y) está dada por

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Ejemplo

Hallar la curvatura de la parábola dada por $y = x - \frac{1}{4}x^2$ en $x = 2$.

27



Teorema

Dada la función vectorial $r(t) = (f(t), g(t))$ donde

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

Entonces

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Ejemplo

Determinar la curvatura de la elipse

$$x = 3 \cos t$$

$$y = 2 \sin t$$

En los puntos que corresponde a $t = 0$, $t = \pi/2$

Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

22

Curvatura

Torsión

27

Torsión



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

23 Torsión

La torsión es un número real que indica el levantamiento de una curva C con respecto a su plano osculador en un punto dado (Mide el levantamiento de una curva)

Definición (Torsión)

Definimos la torsión a la curva como

$$\tau(s) = -\mathbf{N}(s) \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds}(s)$$



Funciones Vectoriales

Mg. Hermes Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y Torsión

Curvatura

Torsión

Observaciones:

- ▶ $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ es ortogonal a \mathbf{T}
- ▶ $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ es ortogonal a \mathbf{B}

Nota:

La torsión para una curva plana es cero ($\tau(s) = 0$)

24

27

Fórmulas de Frenet Serret



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

$$1. \frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$$

$$2. \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

$$3. \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

$$1. \mathbf{T}'(t) = k(t)s'(t)\mathbf{N}(t)$$

$$2. \mathbf{N}'(t) = -k(t)s'(t)\mathbf{T}(t) + \tau(t)s'(t)\mathbf{B}(t)$$

$$3. \mathbf{B}'(t) = -\tau(t)s'(t)\mathbf{N}'(t)$$

25

27

Teoremas Adicionales



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

- ▶ $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + k.(s')^2\mathbf{N}$
- ▶ $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = k.(s')^3\mathbf{B}$
- ▶ $\mathbf{r}''' = [s''' - k^2(s')^3]\mathbf{T} + [3ks's'' + k'(s')^2]\mathbf{N} + k\tau(s')^3\mathbf{B}$

▶

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$$

26

27



Funciones
Vectoriales

Mg. Hermes
Pantoja C.

Ejemplo

Una trayectoria está dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(s) = \left(s - \arctan s, \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(s^2 + 1), \arctan s \right)$$

Hallar la torsión.

Longitud de Arco

Reparametrización
de una Curva

Vectores Unitarios

Vectores Unitarios

Curvatura y
Torsión

Curvatura

Torsión

27

27