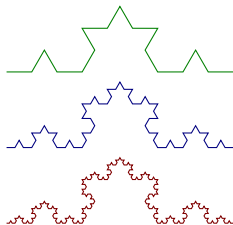


# Funciones Vectoriales

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería Mecánica



Cálculo Vectorial

# Agenda



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Introducción

## Funciones Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones Vectoriales

Límite de una Función Vectorial

Continuidad de una Función Vectorial

Derivada de una Función Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función vectorial

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

# Introducción



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Consideremos una partícula en movimiento sobre un plano. Su posición en un determinado instante  $t$  viene determinado por dos coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$  que depende de  $t$ . Si la partícula se mueve en el espacio su posición queda determinada por tres coordenadas  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  dependientes de  $t$ . En el primer caso la posición de la partícula se describe mediante un vector de dimensión dos cuyas componentes depende de  $t$  y en el segundo caso mediante un vector de tres coordenadas cuyas componentes están en función de  $t$ . Esto nos lleva a considerar un tipo nuevo de funciones.

### 3 Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

# Introducción



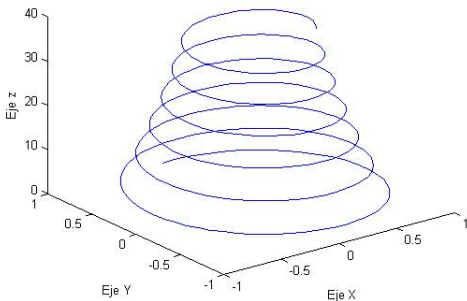
**Funciones  
Vectoriales**

**Mg. Hermes  
Pantoja C.**

## 4 Introducción

### Funciones Vectoriales

- Funciones Vectoriales
- Algebra de Funciones Vectoriales
- Límite de una Función Vectorial
- Continuidad de una Función Vectorial
- Derivada de una Función Vectorial
- Curvas Regulares
- La Integral de una función vectorial



# Funciones Vectoriales(Definición)

Una función de la forma

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} \text{ Plano}$$

ò

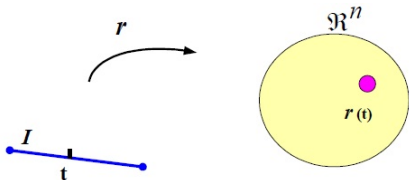
$$\mathbf{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k} \text{ Espacio}$$

es una **función vectorial**, donde las **funciones**

**componentes**  $f, g$  y  $h$  son funciones del parametro  $t$ .

También se denotan como

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t)) \quad \text{ó} \quad \mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

5

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

# Ejemplos



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

6 Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

1. Sea  $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  
$$\mathbf{r}(t) = (1 - 2t, 3 + t, -1 + t)$$

2. Sea  $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  
$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, 3 + t)$$

3. Sea  $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3, 2t + 1)$

4. Sea  $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  
$$\mathbf{r}(t) = \left( t, t^2, 3\sqrt{1 - \frac{t^2}{25} - \frac{t^4}{36}} \right)$$

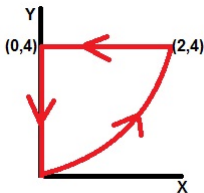
# Ejemplos



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

1. Hallar la función vectorial que describa los límites de la región



2. Hallar una función vectorial cuyo dominio sea el intervalo  $[-3, 3]$  y cuyo rango sea el triángulo de vértice  $(1, 0, 0)$ ;  $(0, 1, 0)$ ;  $(0, 0, 1)$

Introducción

Funciones  
Vectoriales

7

Funciones Vectoriales

Álgebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

# Dominio y Rango



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Dada la función vectorial

$$\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$$

Donde  $r_i : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

## Definición (Dominio)

$$Dom(\mathbf{r}) = \left\{ t \in I \subset \mathbb{R} \mid t \in \bigcap_{i=1}^n Dom(r_i) \right\}$$

## Definición (Rango)

$$Rang(\mathbf{r}) = \{(r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)) \mid t \in Dom(\mathbf{r})\}$$

Introducción

Funciones  
Vectoriales

8

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

# Ejemplo



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

9

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

## Ejemplo

*Dada la función vectorial*

$$\mathbf{r}(t) = \left( \sqrt{9 - t^2}, \frac{1}{t^2 - 5t + 6}, \sqrt{t - [t]} \right)$$

*Hallar el dominio.*



## Definición

Sea  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{u}$  funciones vectoriales con dominios  $Dom(\mathbf{r})$  y  $Dom(\mathbf{u})$  respectivamente  $\phi$  es una función real con  $Dom(\phi)$  entonces

- $(\mathbf{r} \pm \mathbf{u})(t) = \mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t) \quad Dom(\mathbf{r} \pm \mathbf{u}) = Dom(\mathbf{r}) \cap Dom(\mathbf{u})$
- $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t) \quad Dom(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) = Dom(\mathbf{r}) \cap Dom(\mathbf{u})$
- $(\phi \cdot \mathbf{r})(t) = \phi(t) \cdot \mathbf{r}(t) \quad Dom(\phi \cdot \mathbf{r}) = Dom(\phi) \cap Dom(\mathbf{r})$
- $(\mathbf{r} \times \mathbf{u})(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t) \quad Dom(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = Dom(\mathbf{r}) \cap Dom(\mathbf{u})$   
Para  $\mathbb{R}^3$

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

10

36

# Limite de una Función Vectorial



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Definición

Decir que  $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = L$  significa que, para cada  $\epsilon > 0$  dada existe un  $\delta > 0$  tal que  $\|\mathbf{r}(t) - L\| < \epsilon$ , siempre que  $0 < |t - a| < \delta$ , es decir,

$$0 < |t - a| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{r}(t) - L\| < \epsilon$$

## Ejemplo

Demuestre que  $\lim_{t \rightarrow 1} (t, t^2 + 1) = (1, 2)$

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales  
Algebra de Funciones  
Vectoriales

11 Limite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial  
Derivada de una Función  
Vectorial  
Curvas Regulares  
La Integral de una función  
vectorial



## Teorema

Si  $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = (\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t))$$

*siempre que existan los límites de las funciones componentes.*

## Ejemplo

Dada la función vectorial  $\mathbf{r}(t) = \left( \frac{t}{\sin t}, \frac{2}{t}, \llbracket t^2 - 1 \rrbracket \right)$

Evaluar  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t)$



## Teorema

Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son dos funciones vectoriales tales que  $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t)$ ,  
 $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t)$  existen, se cumple

1.  $\lim_{t \rightarrow a} (\mathbf{u} + \mathbf{v})(t) = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t)$
2.  $\lim_{t \rightarrow a} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(t) = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t)$
3.  $\lim_{t \rightarrow a} (\mathbf{u} \times \mathbf{v})(t) = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t)$

### Introducción

### Funciones Vectoriales

Funciones Vectoriales  
Algebra de Funciones  
Vectoriales

13

Limite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

# Continuidad de una Función Vectorial



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Definición

Sea  $r$  una función vectorial, se dice que  $r$  es una función continua en  $a$  si:

1.  $r(a)$  está definida
2.  $\lim_{t \rightarrow a} r(t)$  existe
3.  $\lim_{t \rightarrow a} r(t) = r(a)$

Si alguna de las tres condiciones no cumple entonces la función no es continua en  $a$ .

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

14 Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial



## Funciones Vectoriales

Mg. Hermes Pantoja C.

### Introducción

### Funciones Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones Vectoriales

Límite de una Función Vectorial

15 Continuidad de una Función Vectorial

Derivada de una Función Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función vectorial

## Teorema

*Una función  $\mathbf{r}$  vectorial es continua en el punto  $a$*

*$\mathbf{r}(t) = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  si y solo si cada  $r_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $a$ .*

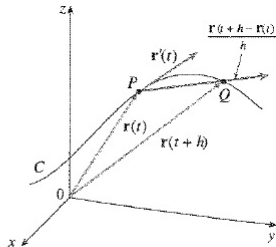
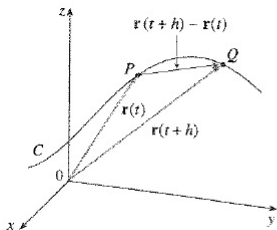
# Derivada de una Función Vectorial

## Definición

Sea  $\mathbf{r}$  una función vectorial cuyo dominio sea un intervalo  $I$ . La **derivada** de  $\mathbf{r}$  en  $t \in I$  es el vector

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

siempre que el límite exista, en cuyo caso se dice que  $\mathbf{r}$  es **diferenciable** en  $t$ .





Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Teorema

Sea  $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ , donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones diferenciables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

17 Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Definición (Vector Velocidad)

El vector no nulo  $\mathbf{r}'(t)$  se le llama vector velocidad de la curva  $C$  en el punto  $\mathbf{r}(t)$ .

Si una función  $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  describe el movimiento de una partícula durante un intervalo de tiempo  $I = [a, b]$ , entonces  $\mathbf{r}'(t)$  es la velocidad y  $\|\mathbf{r}'(t)\|$  es la rapidez de la partícula en el instante  $t$ .

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

18 Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

# Teorema

Supongamos que  $u$  y  $v$  son funciones vectoriales diferenciales,  $c$  es un escalar y  $f$  es una función real.

Entonces:

$$1. \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

$$2. \frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$$

$$3. \frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

$$4. \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

$$5. \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

$$6. \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = \mathbf{u}'(f(t))f'(t)$$

$$7. \frac{d}{dt}[||\mathbf{u}(t)||] = \frac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{||\mathbf{u}(t)||}, \quad \mathbf{u}(t) \neq 0$$



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales  
Álgebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

19 Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Ejercicio



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Álgebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

20 Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

Utilizando sus motores una nave espacial describe el movimiento:

$$r(t) = \left( 3 + t, 2 + \ln t, a - \frac{4}{t^2 + 1} \right)$$

Se desea que llegue a la estación ubicada en  $P=(6,4,9)$ , en ausencia de fuerzas gravitacionales. ¿Cuándo hay que apagar los motores?. ¿Cuál es el valor de  $a$ ?



## Definición

Se dice que una curva  $C \subset \mathbb{R}^n$  es una curva parametrizada, si existe una función vectorial  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\alpha([a, b]) = C$ .

A  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$  se le llama parametrización de la curva  $C$ .



## Funciones Vectoriales

Mg. Hermes Pantoja C.

### Introducción

### Funciones Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones Vectoriales

Límite de una Función Vectorial

Continuidad de una Función Vectorial

Derivada de una Función Vectorial

22

### Curvas Regulares

La Integral de una función vectorial

Sea  $C$  una curva tal que  $\alpha([a, b]) = C$ ,  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

### Definición

*Una curva  $\alpha$  es una con puntos dobles si  $\alpha$  no es inyectiva en  $[a, b]$ , o equivalentemente, si existen  $t_1, t_2 \in [a, b]$ ,  $t_1 \neq t_2$  tales que  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ .*

# Ejemplos

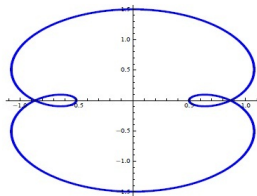
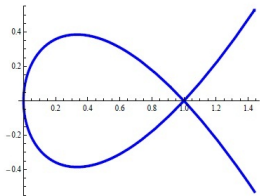


Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

1. Una curva  $C$  parametrizada por  
 $\alpha(t) = (t^2, t^3 - t), \quad t \in \mathbb{R}$

2. Una curva  $C$  parametrizada por  
 $\alpha(t) = \left(\cos t - \frac{\cos 3t}{2}, \sin t - \frac{\sin 3t}{2}\right), \quad t \in [-\pi, \pi]$



Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Álgebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

23 **Curvas Regulares**

La Integral de una función  
vectorial

# Definiciones



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

24 Curvas Regulares

La Integral de una función  
vectorial

## Definición

*Se dice que  $C$  es una curva simple sino posee puntos dobles.*

## Definición

*Se dice que  $C$  es una curva cerrada si  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .*

## Definición

*Se dice que  $C$  es una curva suave o regular si posee parametrización  $\alpha$  tal que  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$*

# Ejemplos



Funciones  
Vectoriales

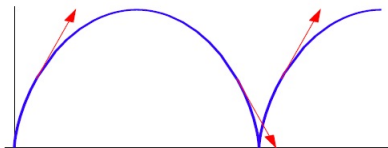
Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Ejemplo

Sea  $\alpha : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos t)$$

*no es una curva regular.*



Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Álgebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

25 **Curvas Regulares**

La Integral de una función  
vectorial

# La Integral de una función vectorial



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Definición

Sea la función diferencial  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  continua en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left( \int_a^b r_1(t) dt, \int_a^b r_2(t) dt, \dots, \int_a^b r_n(t) dt \right)$$

donde

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{g}(t) + \mathbf{c}$$

Si  $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{r}(t)$

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

26

La Integral de una función  
vectorial

# Primer Teorema Fundamental del Cálculo



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

27

La Integral de una función  
vectorial

## Definición

Sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función vectorial continua en  $[a, b]$ , entonces la función  $\mathbf{F}$  definida por

$$\mathbf{F}(t) = \int_a^t \mathbf{r}(t) dt \quad a \leq t \leq b$$

es derivable y  $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{r}(t) \quad \forall t \in [a, b]$

# Segundo Teorema Fundamental de Cálculo



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

28 La Integral de una función  
vectorial

## Definición

Sea  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función vectorial con derivadas integrables entonces

$$\int_a^b \mathbf{r}'(t) dt = \mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)$$

# Propiedades



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Sean  $\mathbf{r}, \mathbf{u} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  funciones vectoriales integrables y  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  un vector constante

1.  $\int_a^b \alpha \mathbf{r}(t) dt = \alpha \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2.  $\int_a^b (\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)) dt = \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \pm \int_a^b \mathbf{u}(t) dt$
3.  $\int_a^b (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}(t)) dt = \mathbf{c} \cdot \int_a^b \mathbf{r}(t) dt$
4.  $\int_a^b \mathbf{c} \times \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{c} \times \int_a^b \mathbf{r}(t) dt$  solo en  $\mathbb{R}^3$
5. Si  $\|\mathbf{r}(t)\|$  es integrable en  $[a, b]$ , tenemos que

$$\left\| \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{r}(t)\| dt$$

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Álgebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

29

La Integral de una función  
vectorial

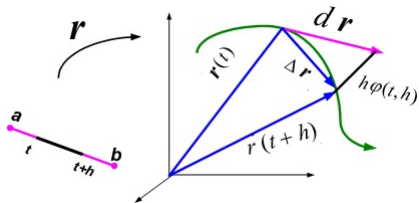


# Diferencial de una Función Vectorial

Sea  $\mathbf{r} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$ , definiremos el incremento de  $\mathbf{r}$  en el punto  $t_0$

$$\Delta \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0), \quad t_0, t_0 + h \in I$$

Interpretación para  $n = 3$



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales  
Álgebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

30

La Integral de una función  
vectorial

# Continuación...



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Si definimos

$$\phi(t_0; h) = \begin{cases} \frac{\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)}{h} - \mathbf{r}'(t_0), & \text{si } h \neq 0 \\ 0, & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

entonces se puede escribir

$$\Delta \mathbf{r}(t_0; h) = \mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0) = \underbrace{h \mathbf{r}'(t_0)}_{d\mathbf{r}(t_0)} + h \phi(t_0; h)$$

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

31

La Integral de una función  
vectorial

# Continuación...



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

$$\mathbf{r}(t_0 + h) = \mathbf{r}(t_0) + d\mathbf{r}(t_0) + h\phi(t_0, h)$$

$$\text{Si } \lim_{h \rightarrow 0} h\phi(t_0, h) = 0 \Rightarrow \Delta\mathbf{r}(t_0) \approx d\mathbf{r}(t_0)$$

$$\mathbf{r}(t_0 + h) \approx \mathbf{r}(t_0) + d\mathbf{r}(t_0)$$

$$\mathbf{r}(t_0 + h) \approx \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0) \cdot h$$

Al vector  $h\mathbf{r}'(t_0)$  se denomina el diferencial de  $\mathbf{r}$  en  $t_0$

$$h\mathbf{r}'(t_0) = d\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)dt$$

## Ejemplo

Si  $\mathbf{r}(t) = (\sin t, t^3 - 2, e^{4t} - 1)$ , aproximar  $\mathbf{r}(0.25)$

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Álgebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

32

La Integral de una función  
vectorial

# Longitud de Arco



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Teorema

Si  $C$  es una curva suave dada por

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , en un intervalo  $[a, b]$ , entonces la longitud de arco de  $C$  en el intervalo es

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

## Ejemplo

Hallar la longitud de arco de la hélice circular

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  desde el punto  $(1, 0, 0)$  al punto  $(1, 0, 2\pi)$

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

33

La Integral de una función  
vectorial



# Parametro Longitud de Arco

Para estudiar las propiedades geométricas de una curva, el parámetro adecuado es a menudo la longitud de arco  $S$ .

## Definición

Sea  $C$  una curva suave dada por  $\mathbf{r}(t)$  definida en  $[a, b]$ , la función longitud de arco está dado por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad \forall t \in [a, b]$$

A la longitud de arco  $s$  se llama parametro longitud de arco.

## Notación:

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

34

La Integral de una función  
vectorial



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Ejemplo

Sea  $C$  una curva descrita por la función

$\mathbf{r}(t) = (3 - 3t, 4t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , describir la curva  $C$  en términos de la longitud de arco.

### Nota:

Si  $t$  es cualquier parametro tal que  $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$ , entonces  $t$  es parámetro longitud de arco.

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

35

La Integral de una función  
vectorial

36



Funciones  
Vectoriales

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Ejercicio

*Una trayectoria está dada por la función vectorial*

$$\mathbf{g}(s) = \left( s - \arctan(s), \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(s^2 + 1), \arctan(s) \right)$$

*Determinar si el parametro  $s$  es la longitud de arco.*

Introducción

Funciones  
Vectoriales

Funciones Vectoriales

Algebra de Funciones  
Vectoriales

Límite de una Función  
Vectorial

Continuidad de una  
Función Vectorial

Derivada de una Función  
Vectorial

Curvas Regulares

36

La Integral de una función  
vectorial