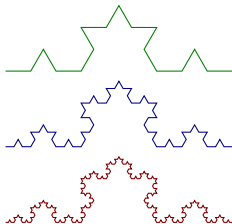


Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ingeniería Industrial



Métodos Computacionales

Agenda



Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

Interpolación Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error



- ▶ Dado un conjunto de datos conocidos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$$

buscamos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, N$$

Introducción

3 Introducción

Aplicaciones

Interpolación y aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error



- ▶ Dado un conjunto de datos conocidos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$$

buscamos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, N$$

- ▶ f es una función interpolante o interpolador

Introducción

3

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error



- ▶ Dado un conjunto de datos conocidos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$$

buscamos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, N$$

- ▶ f es una función interpolante o interpolador
- ▶ El interpolador f puede ser
 - ▶ polinomio
 - ▶ spline

Introducción

3

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

- ▶ Trazado de curvas a través de un conjunto discreto de datos.
- ▶ Determinar valores "intermedios " de una tabla de datos.
- ▶ Derivar e integrar a partir de una tabla de datos.
- ▶ Evaluar de manera fácil una función matemática.
- ▶ Reemplazar una función complicada por una simple.

Introducción

Introducción

4

Aplicaciones

Interpolación y aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error



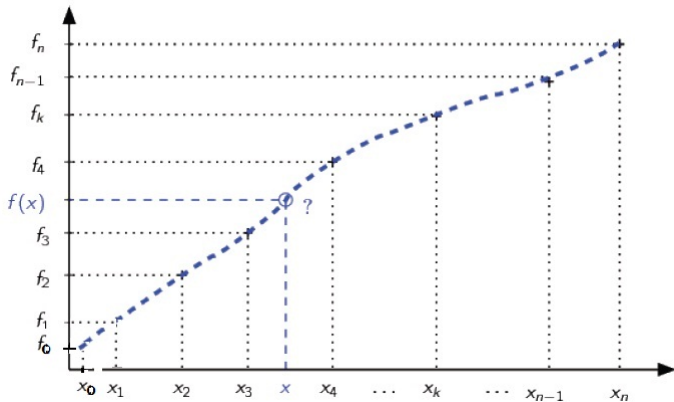
- ▶ Funciones utilizadas como interpoladores
 - ▶ Polinomios
 - ▶ Funciones trigonométricos
 - ▶ Funciones exponenciales
 - ▶ Funciones racionales
- ▶ Los interpoladores se ajustan a los datos de manera exacta ($f(x_i) = y_i$)
- ▶ Interpolación presenta problemas cuando los datos están sujetos a errores significativos.

Introducción



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.



Introducción

Introducción

Aplicaciones

6

Interpolación y aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

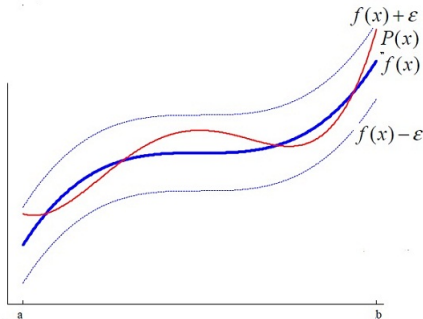
Teorema de Aproximación de Weierstrass



Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Para todo $\epsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$ definido sobre $[a, b]$ tal que:

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

7

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

Universidad Nacional Mayor
de San Marcos
Facultad de Ingeniería
Industrial

41

Teorema

Si x_0, x_1, \dots, x_N son números reales distintos, entonces para $N + 1$ valores arbitrarios y_0, y_1, \dots, y_N existe un único polinomio P_N de grado a lo sumo N tal que

$$P_N(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, N$$

Observaciones

- ▶ El teorema generaliza: "Por 2 puntos distintos del plano pasa una y sólo una línea recta (polinomio de grado 1)"
- ▶ Dado una tabla de datos

x_0	x_1	\dots	x_N
y_0	y_1	\dots	y_N

 existe uno y sólo un polinomio P_N de grado $\leq N$ tal que $P_N(x_i) = y_i$.
- ▶ Aunque el polinomio es único, existen diversas formas de expresarlo y diferentes algoritmos para determinarlos.

Polinomio interpolador



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

- ▶ Asumimos un conjunto de puntos discretos $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ con los valores correspondientes $\{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)\}$
- ▶ Construimos una función $f(x)$ que pasa por $(x_i, f(x_i))$ por medio de la aproximación

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{i=0}^N a_k \phi_k(x)$$

- ▶ $P_N(x)$ es el polinomio interpolante.
- ▶ $\phi_k(x)$ son polinomios conocidos a priori y forman una base.
- ▶ a_k son coeficientes por determinar.

9

41

Interpolación de Vandermonde



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

Introducción
Aplicaciones
Interpolación y aproximación
Teoría

10 Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton
Diferencias Divididas
Diferencias Finitas

Análisis de error

- Consideremos como bases los monomios

$$\phi_k(x) = x^k, \quad k = 0, \dots, N$$

- Para la base dada obtenemos la representación

$$P_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N$$

donde a_0, a_1, \dots, a_N son constantes a determinar.

Interpolación de Vandermonde



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

- Las $N + 1$ ecuaciones que surgen al evaluar x_i en $f(x)$ se pueden expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\iff \mathbf{V}\mathbf{a}=\mathbf{f}$$

- \mathbf{V} es la matriz de *Vandermonde* y

$$\det(\mathbf{V}) = \prod_{0 \leq i < j \leq N} (x_j - x_i) \neq 0$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

11 Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

Ejemplo



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Ejemplo

Determine el polinomio de grado 2 que interpola los tres dados

$$(-2, -27), (0, -1), (1, 0)$$

Solución

Introducción

Introducción
Aplicaciones
Interpolación y aproximación
Teoría

12 Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton
Diferencias Divididas
Diferencias Finitas

Análisis de error



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y aproximación

Teoría

13

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

- ▶ El polinomio está dado por

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

- ▶ Para este caso el sistema está dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ La solución está dada por $\begin{bmatrix} -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}^T$ y

$$P_2(x) = -1 + 5x - 4x^2$$

Interpolación de Lagrange



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

- ▶ Como base tomamos los polinomios básicos de Lagrange definidos por

$$\begin{aligned}L_k(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_N)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_N)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}\end{aligned}$$

- ▶ Propiedades

- ▶ L_k es un polinomio de grado N
- ▶ $L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
Aproximación
teoría

Vandermonde

14 Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

Introducción
Aplicaciones
Interpolación y aproximación
Teoría

Vandermonde

15 Lagrange

Newton

Interpolación de Newton
Diferencias Divididas
Diferencias Finitas

Análisis de error

- ▶ El polinomio de interpolación de Lagrange está dado por

$$P_N(x) = f(x_0)L_0 + f(x_1)L_1 + \dots + f(x_N)L_N$$
$$= \sum_{k=0}^n f(x_k)L_N(x)$$

- ▶ El polinomio de interpolación de Lagrange es de grado $\leq N$ y pasa por los $N + 1$ puntos $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_N, f(x_N))$

Interpolación de Lagrange



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Ejemplo

Dado los siguientes puntos

x	0	0.5	1
y	1	0.8	0.5

hallar los polinomios básicos de Lagrange y el polinomio interpolante.

Solución:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0.5)(x - 1)}{(0 - 0.5)(0 - 1)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}{(x - x_0)(x - x_2)} = \frac{(0.5 - 0)(0.5 - 1)}{(x - 0)(x - 1)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 0.5)}{(1 - 0)(1 - 0.5)}$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

16 Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

Interpolación de Lagrange



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Polinomios Basicos de Lagrange:

$$L_0(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$L_1(x) = -4x^2 + 4x$$

$$L_2(x) = 2x^2 - x$$

Polinomio de Lagrange:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0 * L_0 + y_1 * L_1 + y_2 * L_2 \\ &= 1(2x^2 - 3x + 1) + 0.8(-4x^2 + 4x) + 0.5(2x^2 - x) \\ &= -0.2x^2 - 0.3x + 1 \end{aligned}$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

17 Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

Ejemplo

Determine el polinomio de Lagrange para $f(x) = \frac{1}{x}$ en los puntos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.25$, $x_2 = 4$ y utilícelo para aproximar $f(3)$

Solución:

$$L_0(x) = \frac{(x - 2.5)(x - 4)}{(2 - 2.5)(2 - 4)} = x^2 - 6.5x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(2.5 - 2)(2.5 - 4)} = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{32}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - 2)(x - 2.5)}{(4 - 2)(4 - 2.5)} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4.5}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$P(x) = f(2)L_0(x) + f(2.5)L_1(x) + f(4)L_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$$

$$\rightarrow f(3) \approx P(3) = 0.325$$



El **método de Lagrange** tiene un inconveniente y es que la forma obtenida es mala para operar: para sumarlo con otra función, para derivar, integrar, etc. Por lo que la respuesta es sólo formal y hay que realizar mucho cálculo para obtener la expresión final en la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. De hecho hay otro inconveniente, más sutil que el anterior. Es natural que en el contexto de mediciones y experimentos que nombráramos en la introducción del tema se incorporen nuevos datos. ¿Qué ocurre si nos dan otro dato más $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$? A través de esta vía ¡hay que construir todos los polinomios de Lagrange de nuevo! (lo realizado antes es trabajo inútil). Ambos motivos nos conducen a replantear el problema por otra vía más eficiente.

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

19 Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

Interpolación de Newton



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

Introducción
Aplicaciones
Interpolación y aproximación
Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

20

Interpolación de Newton
Diferencias Divididas
Diferencias Finitas

Análisis de error

- ▶ Con el fin de reducir la complejidad computacional hacemos el siguiente cambio de base

$$\phi_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

- ▶ Ahora $f(x)$ es aproximada por

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

41

Diferencias Divididas



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Diferencias Divididas

- ▶ La k -ésima diferencia dividida

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

- ▶ Los coeficientes son $a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$ y

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

21 Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

Tabla de diferencias divididas



Interpolación
Polinomial
Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

Introducción
Aplicaciones
Interpolación y
aproximación
Teoría

[/andermonde](#)

[.agrange](#)

[Newton](#)

Interpolación de Newton
Diferencias Divididas
Diferencias Finitas

[Análisis de error](#)

x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
...	
...	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$	
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_0, \dots, x_n]$

Diagram illustrating the construction of the divided difference table. The table is structured with columns for nodes x_i , function values $f[x_i]$, and divided differences of order 1, 2, ..., n . Arrows labeled $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ indicate the flow of information from the function values to the higher-order divided differences.

Diferencia Dividida de Newton



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Implementación en MATLAB

```
function F=divideddifference(x,f)
```

```
n=length(x)-1;
```

```
F=zeros(n+1,n+1);
```

```
F(:,1)=f(:);
```

```
for i=1:n
```

```
    for j=1:i
```

```
        F(i+1,j+1)=(F(i+1,j)-F(i,j))/(x(i+1)-x(i-j+1));
```

```
    end
```

```
end
```

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

23

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

Ejemplo



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Ejemplo

Dado los siguientes puntos

x	0	0.5	1
y	1	0.8	0.5

hallar el polinomio interpolante de Newton.

Solución:

$$\begin{array}{l} 0 \quad \underline{1} \\ \quad \quad \quad > \quad \frac{0.8 - 1}{0.5 - 0} = \underline{-0.4} \\ \\ 0.5 \quad 0.8 \\ \quad \quad \quad > \quad \frac{-0.6 + 0.4}{1 - 0} = \underline{-0.2} \\ \\ \quad \quad \quad > \quad \frac{0.5 - 0.8}{1 - 0.5} = -0.6 \\ \\ 1 \quad 0.5 \end{array}$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

24

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

41



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Obtenemos el polinomio de interpolación:

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_2(x) = 1 - 0.4(x - 0) - 0.2(x - 0)(x - 0.5)$$

$$P_2(x) = -0.2x^2 - 0.3x + 1$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

25

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

Ejemplo



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Use diferencias divididas para encontrar el polinomio de interpolación que pasa por los puntos $(0, 1)$, $(2, 5)$ y $(4, 17)$

0	$f[x_0] = 1$		
2	$f[x_1] = 5$	$f[x_0, x_1] = 2$	
4	$f[x_2] = 17$	$f[x_1, x_2] = 6$	$f[x_0, x_1, x_2] = 1$

$$p(x) = 1 + 2x + x(x - 2) = 1 + x^2$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

26

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

41

Ejercicio



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

Introducción
Aplicaciones
Interpolación y aproximación
Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton
Diferencias Divididas
Diferencias Finitas

Análisis de error

Ejercicio

Añada el punto (3, 16) a los puntos anteriores y encuentre el polinomio interpolante.

Solución:

$$P(x) = -2x^3 + 13x^2 - 16x + 1$$

27

41

Diferencias Finitas



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Se define para un conjunto de puntos $(x_0, f_0); (x_1, f_1); \dots; (x_n, f_n)$, igualmente espaciados para x ; es decir, $x_{i+1} - x_i = h$; para $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Diferencia Finita hacia adelante o progresiva

- ▶ Diferencia finita de primer orden

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

- ▶ Diferencia finita de segundo orden

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$$

- ▶ Diferencia finita de orden n

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

28

41

Tabla de Diferencias Finitas



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

x_k	$f(x_k)$	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$
x_0	f_0				
		Δf_0			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
		Δf_3			
x_4	f_4				

Introducción

Introducción
Aplicaciones
Interpolación y
aproximación
Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton
Diferencias Divididas

29

Diferencias Finitas

Análisis de error



Polinomio de interpolación basado en Diferencias Finitas Progresivas

Se debe hallar una relación entre las diferencias finitas y divididas

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$$

Reemplazando en el polinomio basado en diferencias divididas se tiene:

$$P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error

30

41

Diferencias Finitas

Teniendo en cuenta que los intervalos se tomarán igualmente espaciados ($h = x_{i+1} - x_i$) para x , y haciendo el cambio de variable $s = \frac{x - x_0}{h}$

$$\begin{aligned} P_n(s) &= f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots \\ &\dots + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \\ &= f_0 + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \end{aligned}$$



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

31

Diferencias Finitas

Análisis de error



Teorema

Sea $f \in C^{n+1}[a, b]$ y p el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los $n + 1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_n del intervalo $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$ existe un $\xi = \xi(x) \in \langle a, b \rangle$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

32 Análisis de error

Ejemplo

Estime el error cometido al aproximar la función $f(x) = \sin(x)$ por medio del polinomio de grado nueve que interpola a f en diez puntos del intervalo $[0, 1]$

Solución

La cota de error está dado por

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{10!} f^{(10)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Por otra parte:

$$|f^{(10)}(\xi)| = |-\sin \xi| \leq 1 \text{ y}$$

$$x \in [0, 1] \longrightarrow \prod_{i=0}^n (x - x_i) \leq 1$$

Luego

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{10!} \leq 2.8 \times 10^{-7}$$

Ejemplo



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Se desea tabular la función $f(x) = \cos(x)e^x$ definida en $[-\pi, \pi]$ mediante puntos equiespaciados. ¿ Cuántos puntos son necesarios para que al interpolar linealmente entre dos valores consecutivos el error entre la función y el interpolante no supere a 0.5.

Solución:

$$|f(x) - P_1(x)| = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1) \leq \frac{M}{2} \frac{h^2}{4} < 0.5$$

Tomando como caso crítico $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$ y

$$M = \max_{\xi \in [-\pi, \pi]} |f''(\xi)|$$

Dado que: $f''(x) = -2 \sin(x)e^x$

Entonces: $M = 2e^\pi$, por lo tanto $h < 0.2940$

$$N > \frac{2\pi}{h} \Rightarrow N = 22$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

34 Análisis de error

Ejemplo



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Encuentre una cota superior para la diferencia en $x = 0.25$ y $x = 0.75$ entre $f(x) = e^x$ y el polinomio de interpolación en los puntos $-1; -0.5; 0; 0.5; 1$.

Solución:

- ▶ Con cinco puntos el polinomio de interpolación será de grado menor o igual a cuatro, $P_4(x)$.
- ▶ De la fórmula de error de interpolación se obtiene

$$f(x) - P_4(x) = \frac{|(x+1)(x+0.5)x(x-0.5)(x-1)|}{5!} f^{(5)}(\xi) \quad (35)$$

donde $-1 \leq \xi \leq 1$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

Análisis de error



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

Introducción
Aplicaciones
Interpolación y aproximación
Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton
Diferencias Divididas
Diferencias Finitas

36 Análisis de error

- ▶ La quinta derivada de e^x en ξ es $f^{(5)}(\xi) = e^\xi$
- ▶ Como e^x es una función creciente su máximo lo obtiene en el extremo derecho del intervalo, $|f^{(5)}(x)| \leq e^1$ en $[-1, 1]$
- ▶ La fórmula de error queda

$$f(x) - P_4(x) \leq \frac{(x+1)(x+0.5)x(x-0.5)(x-1)}{5!} e$$



Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

Introducción
Aplicaciones
Interpolación y aproximación
Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton
Diferencias Divididas
Diferencias Finitas

37 Análisis de error

- ▶ Así que en $x = 0.25$ el error de interpolación está acotado por

$$|e^{0.25} - P_4(0.25)| \leq \frac{1.25 \times 0.75 \times 0.25 \times 0.25 \times 0.75}{120} \approx 0.000995$$

- ▶ Y en $x = 0.75$ el error queda acotado por

$$|e^{0.75} - P_4(0.75)| \leq \frac{1.75 \times 1.25 \times 0.75 \times 0.25 \times 0.25}{120} \approx 0.002323$$

el cual es más grande.

Error de Interpolación para Newton



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

Teorema

Sea $f \in C^{n+1}[a, b]$ y p el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los $n + 1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_n del intervalo $[a, b]$. Entonces

$$f(x) - p(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Se suele aproximar el error considerando $x = x_{n+1}$, es decir, se requiere un punto adicional.

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

38

Análisis de error

41

Ejemplo

Dada la siguiente tabla de datos

x_i	$f(x_i)$	$f[.,]$	$f[.,.]$	$f[.,.,]$	$f[.,.,.]$
0.1	0.748125	-0.10044			
0.2	0.738081	-0.098475	0.00655	0.2193	
0.4	0.718386	-0.051995	0.1162	0.2401	0.034667
0.6	0.707987	0.01888	0.23625		
0.7	0.709875				

- ▶ *Hallar el polinomio cuadrático interpolante de Newton.*
- ▶ *Interpolarse para $x = 0.17$*
- ▶ *Hallar el error cometido.*

Solución



Interpolación
Polinomial

Mg. Hermes
Pantoja C.

$$P_2(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Reemplazando:

$$P_2(x) = 0.748125 - 0.10044(x - 0.1) + 0.00655(x - 0.1)(x - 0.2)$$

$$P_2(0.17) = 0.741080445$$

Podemos aproximar el error de la siguiente forma

$$e_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$e_2(x) = f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$e_2(0.17) = 0.2193 * (0.17 - 0.1) * (0.17 - 0.2) * (0.17 - 0.4)$$

$$e_2(0.17) = 1.0592 \times 10^{-4}$$

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

40 **Análisis de error**

Observaciones



Interpolación
Polinomial
Mg. Hermes
Pantoja C.

- ▶ Si P interpola a f en los $n + 1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_n

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \dots (*)$$

con $\xi \in [x_0, x_n]$.

- ▶ ξ es desconocido y $(*)$ sólo es útil si la derivada está acotada
- ▶ Si $|f^{(n+1)}(x)| < M$ y
 $h = \max\{x_{i+1} - x_i; i = 0, 1, \dots, n\}$,

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}$$

- ▶ El error disminuye a medida que n crece y h disminuye, solo si $|f^{(n+1)}(x)|$ está acotada.
- ▶ Aumentar el grado del polinomio no garantiza una mejor aproximación (puede aparecer oscilaciones entre los puntos de interpolación).

Introducción

Introducción

Aplicaciones

Interpolación y
aproximación

Teoría

Vandermonde

Lagrange

Newton

Interpolación de Newton

Diferencias Divididas

Diferencias Finitas

41

Análisis de error

41