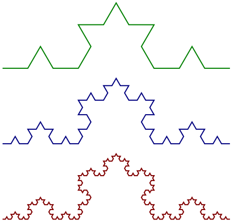
Interpolación Polinomial

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingenieria Mecánica



Métodos Numérico

Agenda

Interpolación

- Dado un conjunto de datos conocidos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$$

  buscamos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaga

$$f(x_i) = y_i, \qquad i = 0, \ldots, N$$

- f es una función interpolante o interpolador
- El interpolador f puede ser
  - polinomio
  - spline

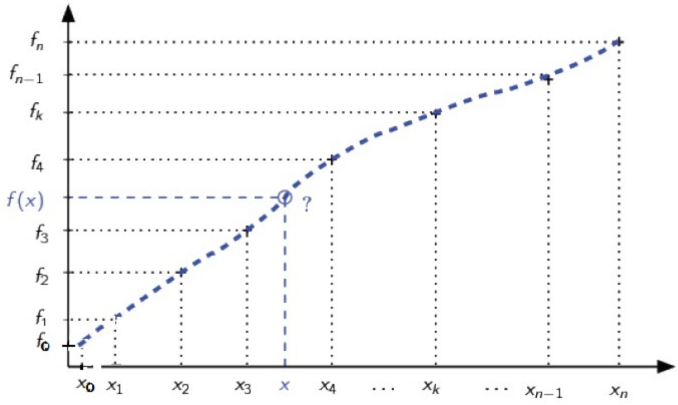
Aplicaciones

- Trazado de curvas a través de un conjunto discreto de datos.
- Determinar valores "intermedios " de una tabla de datos.
- Derivar e integrar a partir de una tabla de datos.
- Evaluar de manera fácil una función matemática.
- Reemplazar una función complicada por una simple.

Introducción

- Funciones utilizadas como interpoladores
  - Polinomios
  - Funciones trigonométricos
  - Funciones exponenciales
  - Funciones racionales
- Los interpoladores se ajustan a los datos de manera exacta $(f(x_i) = y_i)$
- Interpolación presenta problemas cuando los datos están sujetos a errores significativos.

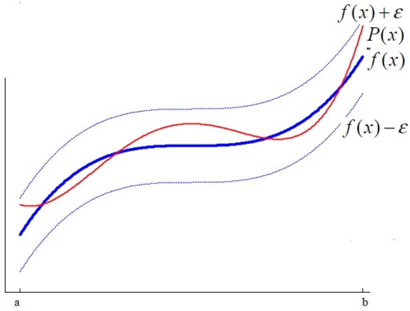
Introducción



Teorema (Teorema de aproximación de Weierstrass)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Para todo $\epsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$ definido sobre $[a, b]$ tal que:

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \qquad \forall \ x \in [a, b]$$



Teorema

Si $x_0, x_1, \ldots, x_N$ *son números reales distintos, entonces para* $N+1$ *valores arbitrarios* $y_0, y_1, \ldots, y_N$ *existe un único polinomio* P_N *de grado a lo sumo* N *tal que*
$P_N(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, N$

Observaciones

- El teorema generaliza:*"Por 2 puntos distintos del plano pasa una y sólo una línea recta (polinomio de grado 1)"*
- Dado una tabla de datos $\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & \ldots & x_N \\ y_0 & y_1 & \ldots & y_N \end{array}$
  existe uno y sólo un polinomio P_N de grado $\leq N$ tal que $P_N(x_i) = y_i$.
- Aunque el polinomio es único, existen diversas formas de expresarlo y diferentes algoritmos para determinarlos.

Polinomio interpolador

- Asumimos un conjunto de puntos discretos $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ con los valores correspondientes $\{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N)\}$
- Construimos una función $f(x)$ que pasa por $(x_i, f(x_i))$ por medio de la aproximación

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} a_k \phi_k(x)$$

- $P_N(x)$ es el polinomio interpolante.
- $\phi_k(x)$ son polinomios conocidos a priori y forman una base.
- a_k son coeficientes por determinar.

Interpolación de Vandermonde

- Consideremos como bases los monomios
  $\phi_k(x) = x^k, \quad k = 0, \ldots, N$
- Para la base dada obtenemos la representación
  $P_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N$
  donde $a_0, a_1, \ldots, a_N$ son constantes a determinar.

Interpolación de Vandermonde

- Las $N+1$ ecuaciones que surgen al evaluar x_i en $f(x)$ se pueden expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \mathbf{Va=f}$$

- **V** es la matriz de *Vandermonde* y

$$det(\mathbf{V}) = \prod_{0 \le i < j \le N} (x_j - x_i) \neq 0$$

.

Ejemplo

Ejemplo

Determine el polinomio de grado 2 que interpola los tres dados

$$(-2,-27),(0,-1),(1,0)$$

Solución

- El polinomio está dado por $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
- Para este caso el sistema está dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La solución está dada por $\begin{bmatrix} -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}^T$ y $P_2(x) = -1 + 5x - 4x^2$

Interpolación de Lagrange

- Como base tomamos los polinomios básicos de Lagrange definidos por

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_N)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_N)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{N} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

- Propiedades
  - L_k es un polinomio de grado N
  - $L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k=j \\ 0 & \text{si} \quad k\neq j \end{cases}$

- El polinomio de interpolación de Lagrange está dado por

$$P_N(x) = f(x_0)L_0 + f(x_1)L_1 + \ldots + f(x_N)L_N = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_N(x)$$

- El polinomio de interpolación de Lagrange es de grado $\leq N$ y pasa por los $N+1$ puntos $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_N, f(x_N))$

Interpolación de Lagrange

Ejemplo

Dado los siguientes puntos

x	0	0.5	1
y	1	0.8	0.5

hallar los polinomios básicos de lagrange y el polinomio interpolante.

Solución:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)} = 2x^2 - 3x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)} = -4x^2 + 4x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)} = 2x^2 - x$$

Interpolación de Lagrange

Polinomio de Lagrange:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0 * L_0 + y_1 * L_1 + y_2 * L_2 \\ &= 1(2x^2 - 3x + 1) + 0.8(-4x^2 + 4x) + 0.5(2x^2 - x) \\ &= -0.2x^2 - 0.3x + 1 \end{aligned}$$

Ejemplo

Determine el polinomio de lagrange para $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en los puntos $x_0 = 2,\ \ x_1 = 2.25,\ \ x_2 = 4$ y utilícelo para aproximar $f(3)$

Solución:

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = x^2 - 6.5x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{32}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4.5}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$P(x) = f(2)L_0(x) + f(2.5)L_1(x) + f(4)L_2(x) =$$

$$0.05x^2 - 0.425x + 1.15$$

$$\longrightarrow f(x) \approx P(3) = 0,325$$

El método de Lagrange tiene un inconveniente y es que la forma obtenida es mala para operar: para sumarlo con otra función, para derivar, integrar, etc. Por lo que la respuesta es sólo formal y hay que realizar mucho cálculo para obtener la expresión final en la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. De hecho hay otro inconveniente, más sutil que el anterior. Es natural que en el contexto de mediciones y experimentos que nombrámos en la introducción del tema se incorporen nuevos datos. ¿Qué ocurre si nos dan otro dato más $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$? A través de esta vía ¡hay que construir todos los polinomios de Lagrange de nuevo! (lo realizado antes es trabajo inútil). Ambos motivos nos conducen a replantear el problema por otra vía más eficiente.

Interpolación de Newton

- Con el fin de reducir la complejidad computacional hacemos el siguiente cambio de base

$$\phi_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

- Ahora $f(x)$ es aproximada por

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$\ldots a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Diferencias Divididas

Mg. Hermes Pantoja C.

Diferencias Divididas

- La *k-ésima diferencia dividida*

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

- Los coeficientes son $a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$ y

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingenieria Mecánica

Tabla de diferencias divididas

	a_0	a_1	a_2		a_n
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
...	...	...	...		
...	...	...	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$		
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	$f[x_0, \dots, x_n]$

Diferencia Dividida de Newton

Implementación en MATLAB

```
function F=divideddifference(x,f)

n=length(x)-1;
F=zeros(n+1,n+1);
F(:,1)=f(:);
for i=1:n
  for j=1:i
    F(i+1,j+1)=(F(i+1,j)-F(i,j))/(x(i+1)-x(i-j+1));
  end
end
```

Ejemplo

Ejemplo

Dado los siguientes puntos

x	0	0.5	1
y	1	0.8	0.5

hallar el polinomio interpolante de Newton.

Solución:

$$\begin{array}{c|c|l}
0 & \underline{1} & \\
 & & > \dfrac{0.8-1}{0.5-0} = \underline{-0.4} \\
0.5 & 0.8 & \qquad\qquad > \dfrac{-0.6+0.4}{1-0} = \underline{-0.2} \\
 & & > \dfrac{0.5-0.8}{1-0.5} = -0.6 \\
1 & 0.5 &
\end{array}$$

Obtenemos el polinomio de interpolación:

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_2(x) = 1 - 0.4(x - 0) - 0.2(x - 0)(x - 0.5)$$

$$P_2(x) = -0.2x^2 - 0.3x + 1$$

Ejemplo

Use diferencias divididas para encontrar el polinomio de interpolación que pasa por los puntos $(0,1),(2,5)$ y $(4,17)$

		a_0	a_1	a_2
0	$f[x_0]=1$			
2	$f[x_1]=5$	$f[x_0,x_1]=2$		
4	$f[x_2]=17$	$f[x_1,x_2]=6$	$f[x_0,x_1,x_2]=1$	

$p(x)=1+2x+x(x-2)$ **También** $p(x)=1+x^2$

Ejercicio

Ejercicio

Añada el punto $(3, 16)$ *a los puntos anteriores y encuentre el polinomio interpolante.*

Solución:

$$P(x) = -2x^3 + 13x^2 - 16x + 1$$

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingenieria Mecánica

Diferencias Finitas

Se define para un conjunto de puntos $(x_0, f_0); (x_1, f_1); \ldots; (x_n, f_n)$, igualmente espaciados para x; es decir, $x_{i+1} - x_i = h$; para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Diferencia Finita hacia adelante o progresiva

- Diferencia finita de primer orden

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

- Diferencia finita de segundo orden

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$$

- Diferencia finita de orden n

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$$

Tabla de Diferencias Finitas

x_k	$f(x_k)$	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 fk$	$\Delta^4 f_k$
x_o	f_0				
		Δf_0			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
		Δf_3			
x_4	f_4				

Polinomio de interpolación basado en Diferencias Finitas Progresivas

Se debe hallar una relación entre las diferencias finitas y divididas

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k}$$

Reemplazando en el polinomio basado en diferencias divididas se tiene:

$$P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1! h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$+ \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

Diferencias Finitas

Teniendo en cuenta que los intervalos se tomarán igualmente espaciados ($h = x_{i+1} - x_i$) para x, y haciendo el cambio de variable $s = \dfrac{x - x_0}{h}$

$$P_n(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$= f_0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0$$

Error de Interpolación

Teorema

Sea $f \in C^{n+1}[a,b]$ y p el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$ existe un $\xi = \xi(x) \in \langle a, b\rangle$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Ejemplo

Estime el error cometido al aproximar la función $f(x) = \sin(x)$ por medio del polinomio de grado nueve que interpola a f en diez puntos del intervalo $[0, 1]$

Solución

La cota de error está dado por

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{10!} f^{(10)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Por otra parte:
$[f^{(10)}(\xi) = -\sin\xi \longrightarrow |f^{(10)}(\xi)| \leq 1$ y
$x \in [0, 1] \longrightarrow \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \leq 1$
Luego

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{10!} \leq 2.8 \times 10^{-7}$$

Ejemplo

Se desea tabular la función $f(x) = cos(x)e^x$ definida en $[-\pi, \pi]$ mediante puntos equiespaciados. ¿ Cúantos puntos son necesarios para que al interpolar linealmente entre dos valores consecutivos el error entre la función y el interpolante no supere a 0.5.

Solución:

$$|f(x) - P_1(x)| = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1) \leq \frac{M}{2}\frac{h^2}{4} < 0.5$$

Tomando como caso critico $x = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$ y

$M = \max_{\xi \in [-\pi,\pi]} |f''(\xi)|$

Dado que: $f''(x) = -2\sin(x)e^x$

Entonces: $M = 2e^{\pi}$, por lo tanto $h < 0.2940$

$$N > \frac{2\pi}{h} \Rightarrow N = 22$$

Ejemplo

Encuentre una cota superior para la diferencia en $x = 0.25$ *y* $x = 0.75$ *entre* $f(x) = e^x$ *y el polinomio de interpolación en los puntos* $-1; -0.5; 0; 0.5; 1$.

Solución:

- Con cinco puntos el polinomio de interpolación será de grado menor o igual a cuatro, $P_4(x)$.
- De la fórmula de error de interpolación se obtiene

$$f(x) - P_4(x) = \frac{|(x+1)(x+0.5)x(x-0.5)(x-1)|}{5!} f^{(5)}(\xi)$$

donde $-1 \leq \xi \leq 1$

- La quinta derivada de e^x en ξ es $f^{(5)}(\xi) = e^{\xi}$
- Como e^x es una función creciente su máximo lo obtiene en el extremo derecho del intervalo, $|f^{(5)}(x)| \leq e^1$ en $[-1, 1]$
- La fórmula de error queda

$$f(x) - P_4(x) \leq \frac{(x+1)(x+0.5)x(x-0.5)(x-1)}{5!} e$$

- Así que en $x = 0.25$ el error de interpolación está acotado por

$$|e^{0.25} - P_4(0.25)| \leq \frac{1.25 \times 0.75 \times 0.25 \times 0.25 \times 0.75}{120} e \approx 0.000995$$

- Y en $x = 0.75$ el error queda acotado por

$$|e^{0.75} - P_4(0.75)| \leq \frac{1.75 \times 1.25 \times 0.75 \times 0.25 \times 0.25}{120} e \approx 0.002323$$

el cúal es más grande.

Error de Interpolación para Newton

Teorema

Sea $f \in C^{n+1}[a,b]$ y p el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[a,b]$. Entonces

$$f(x) - p(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Se suele aproximar el error considerando $x = x_{n+1}$, es decir, se requiere un punto adicional.

Ejemplo

Dada la siguiente tabla de datos

x_i	$f(x_i)$	f[,]	f[,,]	f[,,,]	f[,,,,]
0.1	0.748125				
		-0.10044			
0.2	0.738081		0.00655		
		-0.098475		0.2193	
0.4	0.718386		0.1162		0.034667
		-0.051995		0.2401	
0.6	0.707987		0.23625		
		0.01888			
0.7	0.709875				

- *Hallar el polinomio cuadrático interpolante de Newton.*
- *Interpolar para* $x = 0.17$
- *Hallar el error cometido.*

Solución:

a. $P_2(x) = f_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1.x_2](x-x_0)(x-x_1)$
Reemplazando:

$$P_2(x) = 0.748125 - 0.10044(x-0.1) + 0.00655(x-0.1)(x-0.2)$$

b. $P_2(0.17) = 0.741080445$

c. Podemos aproximar el error de la siguiente forma

$$e_n(x) = f[x_0,x_1,\ldots,x_{n+1}](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

$$e_2(x) = f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$e_2(0.17) = 0.2193*(0.17-0.1)*(0.17-0.2)*(0.17-0.4)$$

$$e_2(0.17) = 1.0592 \times 10^{-4}$$

Observaciones

- Si P interpola a f en los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$
$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad \ldots(*)$$
con $\xi \in [x_0, x_n]$.
- ξ es desconocido y $(*)$ sólo es útil si la derivada está acotada
- Si $|f^{(n+1)}(x)| < M$ y
$h = \text{máx}\{x_{i+1} - x_i; i = 0, 1, \ldots, n\}$,
$$\text{máx}_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}$$
- El error disminuye a medida que n crece y h disminuye, solo si $|f^{n+1}(x)|$ está acotada.
- Aumentar el grado del polinomio no garantiza una mejor aproximación (puede aparecer oscilaciones entre los puntos de interpolación)