

# Matemática I: Números Reales

Hermes Pantoja Carhuavilca

20 de Agosto del 2011

## 1 Desigualdades

1. Resolver

$$\frac{3(x-1)^2}{x^2-10x+25} < \frac{(x-1)^2}{3}$$

2. Si  $a < 1$  y el conjunto solución de la inecuación en  $x$

$$x + a^2 \leq ax + 1 \leq x + a^3$$

es unitario, hallar  $x$ .

3. Si  $a$  es una constante real fija tal que  $1 < a < 2$ . Resolver la siguiente inecuación en  $\mathbb{R}$

$$\frac{x-a}{x+2a} \geq -a$$

4. Si  $a, b$  y  $c$  son números reales fijos tales que  $ab < 0$ ,  $|b| = -b$  y  $bc > 0$ . Resolver en  $\mathbb{R}$  la inecuación:

$$\frac{b-a}{cx-a} > 1$$

5. Si  $a, b$  y  $c$  son constantes fijas tales que  $a < b$  y  $c > 0$ .

(a) Demostrar que

$$a < \frac{a+bc}{1+c} < b$$

(b) Resolver en  $\mathbb{R}$  la inecuación

$$\frac{1}{x-b} \leq \frac{c}{a-x}$$

6. Si  $c$  es una constante fija tal que  $2 < c \leq 4$ .

(a) Resolver en  $\mathbb{R}$  la siguiente inecuación

$$\frac{x^2-2x+13}{(x-c^2+3)(x+c)} \leq 0$$

(b) Si  $x$  satisface la inecuación de la parte (a), ¿es cierto que  $x \in [-5, 15]$ ?

7. Si  $a, b \in \mathbb{R}^+$  son constantes fijas tales que  $a+1 < b$ , resolver la inecuación

$$\frac{x}{x-a} < \frac{1-x}{b-x}$$

8. Sea  $a \in \mathbb{R}$ , talque  $-3 < a < 3$ , resolver la inecuación

$$\frac{(x+2a^2-3a-28)\left(x-\frac{a}{3}\right)^2}{\left(x-\frac{a}{3}\right)(x+2)} \geq 0$$

9. Si  $a$  y  $b$  son constantes reales tales que  $-1 < 2a < 0 < b$ , hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{(a-x)(2x+1)}{bx-1} \geq 0.$$

10. Si  $0 < a < b$  entonces el intervalo  $\left] \frac{a+b}{2}, b \right[$  es subconjunto del conjunto solución de la inecuación  $\frac{(2x-a-b)(b-x)}{2x+2a} < 0$ .

11.  $\frac{a^2}{ax+b} > \frac{ab}{2(bx-a)}$ , si  $a < 0 < b$

12. Analizar el valor de verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta.

(a) Los valores de  $m$  para que la ecuación  $mx^2 + (4m+1)x + 7m - 1 = 0$  tenga solución son  $m = -\frac{1}{2}$  y  $m = \frac{1}{6}$ .

(b) Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , si  $a < 1$  y  $b > 1$  entonces  $1 + ab > a + b$ .

13.  $\frac{2}{x-5} \geq 1 + \frac{1}{x-2}$

14.  $\frac{ax - a(1-a)}{a^2 - ax - 1} > 0$ , sabiendo que  $0 < a < 1$

15.  $\frac{1}{x-b} + \frac{c}{x-a} \geq 0$ , si  $a, b, c$  son constantes tales que  $a < b$  y  $c > 0$ .

16. Si  $1 < k < 2$ , resolver la inecuación

$$\frac{(1-k)x-4}{kx^3+(k-1)x^2+kx} \geq 0$$

17.  $\frac{x}{x^2-5x+6} - \frac{1}{2-x} \leq \frac{2x}{(3-x)(1-x)}$

18. Hallar los valores de  $k$  para los cuales la siguiente inecuación tiene solución única

$$(k-1)x^2 - kx \leq k-3$$

19.  $\frac{(x+a+b)(3x+b-a)}{2-x^2-x^{-2}} \geq 0$

## 2 Valor Absoluto

1.  $\left| \frac{x+5}{x+1} \right| < \frac{7}{3}$

2.  $||3x+1| - x| \geq x^2 - 2$

3.  $|3x+5| + |x-2| = |3x^2 - x - 10| + 1$

4.  $x^2 + 2x + 4 \leq |2x-4| < x^2 + 4$

5.  $\left| \frac{x-4}{|x-1|-2} \right| < 2$

6.  $1 \leq \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \leq a$ , donde  $a$  es una constante real tal que  $a > 1$ .

7.  $\frac{x|x-2|}{x-1} > 2$

8.  $1 \leq \left| \frac{x+2}{2x-3} \right| \leq 2$

9.  $||x^2-1| - x| = x$

10. ¿Para qué valores de  $c$  se cumplirá que la ecuación

$$|x+8| = |2x+4| + |5-x| + c$$

tiene conjunto solución no vacío contenido en  $] -\infty, -18]$ ?

11.  $|x^3 - 3x^2 + 2x| < 2|x-1| - x|x-1|$

12. Encuentre el menor valor real de  $k$  que verifica

$$x \in [8, 14] \Rightarrow \left| \frac{4x+1}{x-4} - \frac{1}{4} \right| \leq k$$

13. Resolver

$$|x^2 - 4x - 5| - x^2 \leq |x+1| + 3x - 2$$

14. Resolver la siguiente inecuación

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{|x+2|} + \frac{2-x}{|x^2-4|} \leq 0$$

15.  $\frac{1}{|x-1|} + \frac{1}{|x+2|} \leq 1$

16. Resolver en el conjunto de los números reales la siguiente inecuación

$$\frac{(x^4+1)(x^2-1)(2-x)}{(|x-4|+3)(|x-4|-3)} \leq 0$$

17. Si  $a < -1$ , resolver:

$$\frac{x^2+ax}{|x|} \leq a + \frac{x^2-4a^2}{|x+2a|}$$

18.  $\frac{5-|x+2|}{|x+2|-|x|} < 0$

19.  $|x+2| - \frac{1}{|x-3|} < 1$

20. Si  $|k| < 4$ , resolver:

$$|x + 2| - |x^2 - x - 6| \leq x^2 + k$$

21.  $\frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{|x + 2|} \leq |x^2 - x|$

22.  $0 \leq \frac{|x - 2| - x}{|x| + |x - 2|} \leq 1$

23.  $|x + 7| + |x - 8| \leq 15 - x^2$

24.  $|x - (1 - a)| \leq \frac{5a - 5}{|x - 5|}$ , sabiendo que  $x \in ]1 - a, 5[$  y  $1 < a < 5$

### 3 Miscelania de problemas

Resolver las siguientes inecuaciones:

1.  $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 < 0$

2.  $\frac{(x + 3)(x + 2)}{x} \leq x^3 + 5x^2 + 6x$

3.  $\frac{x^2 + x}{x - 2} \leq x + \frac{3}{x + 2}$

4.  $\frac{6}{x + 3} + \frac{1}{x - 2} \geq 2$

5.  $\frac{bx - a}{cx - b} < 1$ , si  $a, b$  y  $c$  son constantes tales que  $c < b < 0 < a$ .

6.  $\frac{(a - b)x - b}{(bx^2 + x + b)\left(x - \frac{b^2}{a^2 - ab}\right)} \leq 0$ , si  $a < 0 < 1 < b$ .

7.  $\frac{x - a}{x + a} + \frac{x + b}{x - b} < 2$ , si  $a < 0 < b$ .

8.  $|x + 4| = 2x - 6$

9.  $||x^2 - 1| - x| = x$

10.  $x^2 + 2x + 4 \leq |2x - 4| < x^2 + 4$

11.  $|x^3 - 3x^2 + 2x| < 2|x - 1| - x|x - 1|$

12.  $\frac{x|x - 2|}{x - 1} > 2$ .

13.  $1 \leq \left| \frac{x + 2}{2x - 3} \right| \leq 2$

14. Si  $a < -1$ , resolver

$$\frac{x^2 - ax}{|x|} \leq a + \frac{x^2 - 4a^2}{|x + 2a|}$$

15. Resolver

$$\frac{1}{|x + 3|} - \frac{1}{|4 - x|} \geq -1$$