

Tema: Funciones Reales de Varias Variables

- Determinar el dominio y el rango de la función $f(x, y) = \frac{xy - 5}{2(y - x^2)^{1/2}}$, esquematizar el dominio y localizar los valores pares $(2, 5)$, $(1, 2)$ y $(-1, 2)$
- Utilizando definición de límites demostrar:
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = 0$
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x + y^2) = 5$
- Probar que en los siguientes casos NO existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$
 - $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
 - $f(x, y) = \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$
 - $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x + y} & \text{si } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$
- Describe las curvas de nivel de las funciones:
 - $f(x, y) = y^2$
 - $f(x, y) = xy^2$
- Demostrar
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + 2y - 3) = 8$$
- Sea $f(x, y) = \frac{x^6y^6}{x^4 + ay^4}$ ¿para qué valores de a existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$
- Sea $g(x, y) = \frac{x^3 + 4x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2}$
 - Evalúe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$
 - Redefina $g(x, y)$ de modo que sea continua para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{2x^6 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 - ¿ f es continua en todo su dominio?

9. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2xy^2)}{2(x^2 + y^4)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determinar si f es continua en $(0, 0)$

10. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x - y)^n}{x^2 + 2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- ¿Para qué valores de n es f continua en $(0, 0)$?
- Hallar $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ si es que existen.
- ¿Para $n = 1$ y $n = 2$ la función es diferenciable en $(0, 0)$?