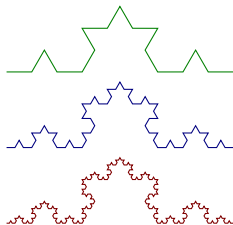


# Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería Mecánica



Cálculo Vectorial



## Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

# Nota Histórica



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

3

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

**Sonya Kovalevsky** (1850-1891). Gran parte de la terminología usada para definir límites y continuidad de una función de dos o tres variables la introdujo el matemático alemán **Karl Weierstrass** (1815-1897). El enfoque riguroso de Weierstrass a los límites y a otros temas en cálculo le valió la reputación de “padre del análisis moderno”.

Weierstrass era un maestro excelente. Una de sus alumnas fue la matemática rusa Sonya, quien aplicó muchas de las técnicas de Weierstrass a problemas de la física matemática y se convirtió en una de las primeras mujeres aceptada como investigadora matemática.



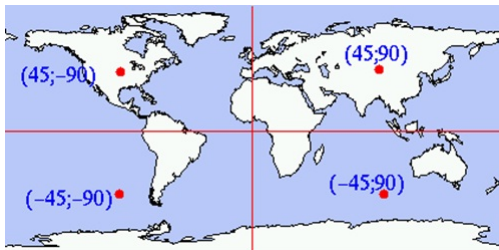
Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Función real de dos variables



La temperatura  $T$  en un punto en la superficie terrestre en cualquier tiempo depende de la latitud  $x$  y la longitud  $y$  del punto. Podemos considerar

$$T = f(x, y)$$



Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

Funciones de Varias Variables

Introducción

4 Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Definición

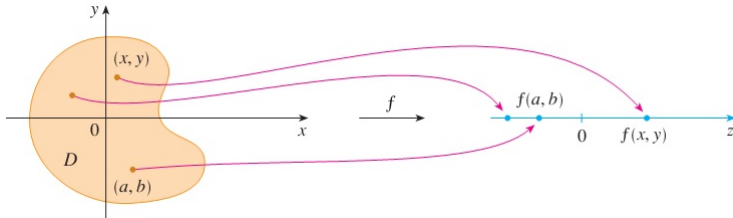


Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Definición

Una función  $f$  de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales  $(x, y)$  de un conjunto  $D$ , un número real único denotado por  $f(x, y)$



Funciones de  
Varias Variables

Introducción

5 Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

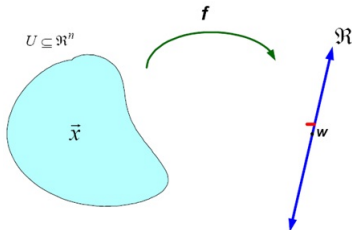


# Función real de $n$ variables

## Definición

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto de  $n$ -uplas. Si a cada  $n$ -upla de  $U$  diferente le corresponde un número real  $w$ , entonces se dice que  $f$  es función de  $\mathbf{x}$

$$\begin{array}{ccc} f : U \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & \rightarrow & w \\ & & w = f(\mathbf{x}) \end{array}$$



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

6 Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



# Dominio

## Definición (Dominio)

$$\text{Dom}(f) = \{x \in U \subset \mathbb{R}^n \mid \exists w \in \mathbb{R} \wedge w = f(x)\}$$

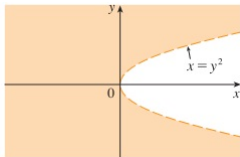
## Ejemplo

Hallar el dominio de la siguiente función

$$f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$$

**Solución:**

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^2\}$$



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

7

**Dominio y Rango**

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



## Definición (Rango)

$$\text{Rang}(f) = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R} / (x, y) \in \text{Dom}(f)\}$$

## Ejemplo

Hallar el rango de la siguiente función

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

**Solución:**

$$0 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow -x^2 - y^2 \leq 0 \Rightarrow 9 - x^2 - y^2 \leq 9$$

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \underbrace{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}_{f(x,y)} \leq 3$$

$$\text{Rang}(f) = [0, 3]$$

## Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

8

**Dominio y Rango**

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita



Introducción

Función real de varias  
variables

9

**9** Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Hallar el dominio de las funciones

1.  $f(x, y) = \frac{1}{xy}$

2.  $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - y^2}}$

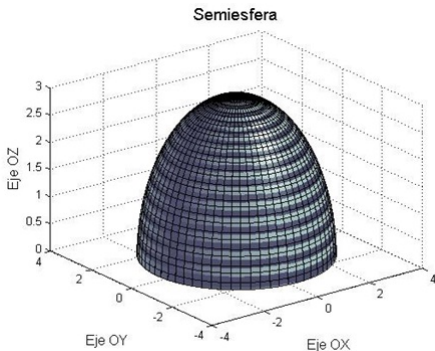


# Gráfica de funciones de varias variables

## Definición

Si  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , el **gráfico de  $f$**  es un conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^3$ :

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}$$



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

10 Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

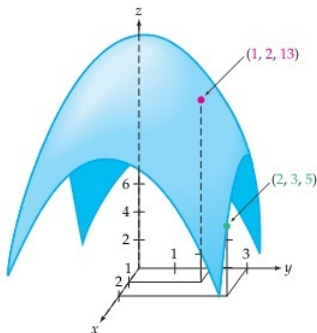
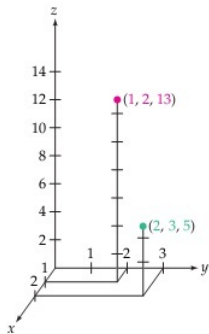
Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Ejemplo



## Ejemplo

Graficar  $f(x, y) = 18 - x^2 - y^2$



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

11 Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Curvas de Nivel



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

12 **Grafica de funciones de varias variables**

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Suponga que la superficie  $z = f(x, y)$  se intersecta con el plano  $z = c$ , y que la curva de intersección se proyecta sobre el plano  $XY$ . Esta curva proyectada tiene a  $f(x, y) = c$  como su ecuación, y la curva se denomina curva de nivel de la función  $f$  en  $c$ . Cada punto de la curva de nivel corresponde a sólo un punto de la superficie que se encuentra a  $c$  unidades de ella.

# Curvas de Nivel



**Funciones Reales  
de Varias Variables**

**Mg. Hermes  
Pantoja C.**

**Funciones de  
Varias Variables**

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

13 **Grafica de funciones de  
varias variables**

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

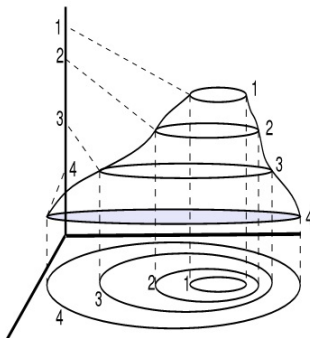
Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita



Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

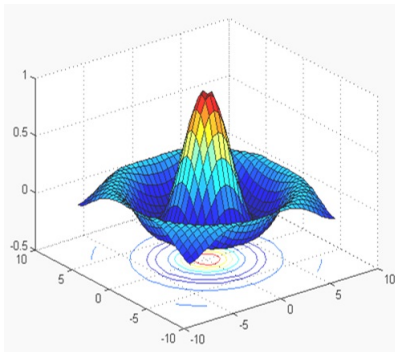
# Ejemplo



## Ejemplo

*Graficar las curvas de nivel de la función*

$$z = f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

14 **Grafica de funciones de  
varias variables**

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

15 **Grafica de funciones de varias variables**

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Hallar las curvas de nivel de las superficies

1.  $z = 2x + y - 1$

2.  $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

# Superficie de Nivel



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

16 **Grafica de funciones de varias variables**

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

El concepto de curva de nivel puede extenderse una dimensión para definir una **superficie de nivel**. Si  $f$  es una función de tres variables y  $c$  es una constante, la gráfica de la ecuación  $f(x, y, z) = c$  es una **superficie de nivel** de la función  $f$ .

# Ejemplo

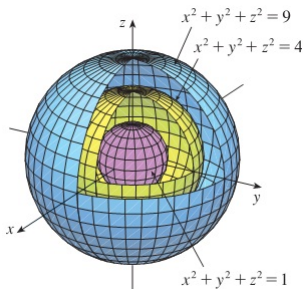


## Ejemplo

Encontrar las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

**Solución:**



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

17 **Grafica de funciones de  
varias variables**

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



Sean

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Con dominios  $U$  y  $V$  respectivamente, definimos

1.  $(f \pm g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x}) \quad \text{Dom}(f \pm g) = U \cap V$
2.  $(f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) \quad \text{Dom}(f \cdot g) = U \cap V$
3.  $(f/g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x}) \quad \text{Dom}(f/g) = U \cap V - \{\mathbf{x} / g(\mathbf{x}) = 0\}$

# Conceptos Previos



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

19

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Si  $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $\delta > 0$ , el conjunto

$$B(\mathbf{x}_0; \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n / \|P - \mathbf{x}_0\| < \delta\}$$

se llama **bola abierta** de centro  $\mathbf{x}_0$  y radio  $\delta$ .

El conjunto

$$B'(\mathbf{x}_0; \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n / \|P - \mathbf{x}_0\| < \delta\} - \{\mathbf{x}_0\}$$

Se llama **bola abierta reducida**.

El conjunto

$$\bar{B}(\mathbf{x}_0; \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n / \|P - \mathbf{x}_0\| \leq \delta\}$$

Se llama **bola cerrada**.

# Conceptos Previos



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

20 Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Definición

Un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  es abierto

$$\iff \forall \mathbf{x} \in D, \exists \delta > 0 / B(\mathbf{x}, \delta) \subset D$$

## Definición

Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado  $\iff$  el complemento de  $S$  es abierto.

## Definición

Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$ ; el punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es un punto de acumulación de  $D$  si  $\forall \epsilon > 0, B'(x_0, \delta) \cap D \neq \emptyset$

# Bola Abierta - Punto Interior - Punto Frontera



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

21 Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

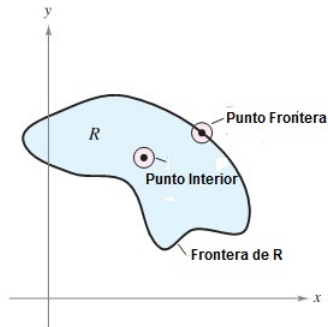
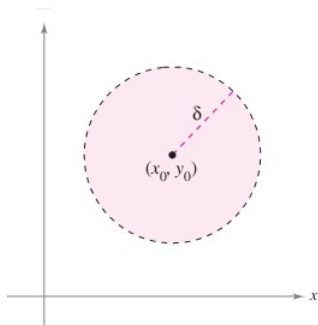
Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



# Punto de Acumulación



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

22

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

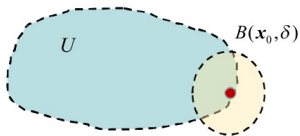
Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita



$$B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap U \neq \emptyset$$

# Límites de una función de varias variables



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

23 **Límites de una función de  
varias variables**

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  punto de acumulación de  $D$  y  $L$  un número real. Se dice que el límite en  $\mathbf{x}_0$  es  $L$ .

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$

# Continuación...



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

24 **Límites de una función de  
varias variables**

Continuidad de funciones  
de varias variables

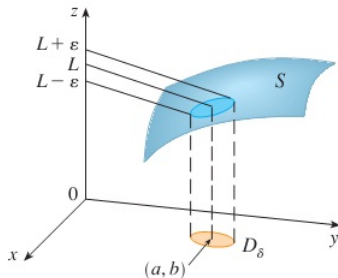
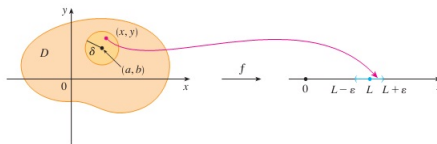
Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



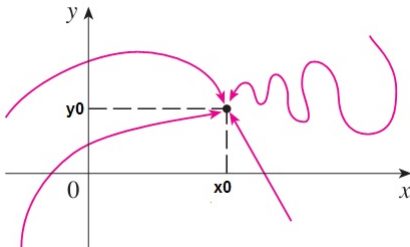
# Ejemplo



## Ejemplo

*Demostrar*

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + y^2) = 2 \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$
$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} 2xy + y^2 = 8$$



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

25 **Límites de una función de  
varias variables**

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



## Teorema

Sea  $S_1$  y  $S_2$  conjuntos en  $\mathbb{R}^2$  que tienen al punto  $(x_0, y_0)$  como un punto de acumulación y si

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (P \in S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (P \in S_2)}} f(x, y)$$

entonces  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  no existe.



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

27 **Límites de una función de  
varias variables**

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Determinar si*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

*existe*

## Ejemplo

*Determinar si*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

*existe*

# Propiedades de Límites



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

28

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Sean

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Con dominios  $U$  y  $V$  respectivamente, tal que  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$  y  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$  existen y si  $\mathbf{x}_0$  es un punto de acumulación de  $U \cap V$ , entonces

- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f \pm g)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$
- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f \cdot g)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$
- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (f/g)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) / \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$  Si  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (g)(\mathbf{x}) \neq 0$



## Teorema

Sean  $g$ ,  $f$  y  $h$  funciones de  $n$  variables definidas en una bola abierta  $B(\mathbf{x0}; r)$ , excepto tal vez en  $\mathbf{x0}$  mismo, tal que

$$g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x0}; r)$$

y si  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x0}} g(\mathbf{x}) = L = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x0}} h(\mathbf{x})$  entonces,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x0}} f(\mathbf{x})$  existe y  
 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x0}} f(\mathbf{x}) = L$



## Ejemplo

Sea

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Hallar  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  si existe.

## Ejemplo

Sea

$$f(x, y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

Hallar  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  si existe.

**Funciones Reales  
de Varias Variables**

**Mg. Hermes  
Pantoja C.**

**Funciones de  
Varias Variables**

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

30

**Límites de una función de  
varias variables**

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Continuidad de funciones de varias variables



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

31 Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Definición

Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en  $U$ , se dice  $f$  es continua en  $\mathbf{x}_0 \in U$  si cumple las siguientes condiciones

1.  $f(\mathbf{x}_0)$  existe
2.  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$  existe
3.  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$

# Tipos de discontinuidad



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## ► Discontinuidad removible

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L \text{ existe}$$

Se redefine  $f$  en  $(x_0, y_0)$  como  $L$

## ► Discontinuidad esencial

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ no existe.}$$

32

# Ejemplos



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

33 Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Analizar la continuidad de*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*En el punto (0, 0)*

# Ejemplos



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

34 Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Analizar la continuidad de*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*En el punto (0,0)*

# Ejercicio



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

35 Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Analizar la continuidad de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x(x^2 + y^2)}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

En el punto  $(0, 0)$

# Ejemplo



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

36 Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Analizar la continuidad de la siguiente función:*

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{si } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

# Solución



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

37 Continuidad de funciones  
de varias variables

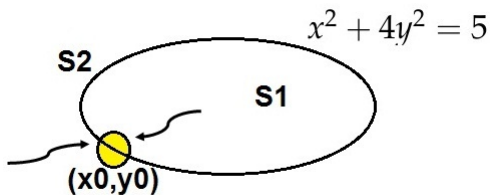
Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

38 Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{si } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } x^2 + 4y^2 < 5 & \text{Continua} \\ 5 & \text{si } x^2 + 4y^2 = 5 \\ 3 & \text{si } x^2 + 4y^2 > 5 & \text{Continua} \end{cases}$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

39 Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Analizaremos la continuidad de  $f(x, y)$  sobre la elipse  $x^2 + 4y^2 = 5$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } S_1 : x^2 + 4y^2 < 5 & \text{Continua} \\ 5 & \text{si } x^2 + 4y^2 = 5 \\ 3 & \text{si } S_2 : x^2 + 4y^2 > 5 & \text{Continua} \end{cases}$$

$$f(x_0, y_0) = 5, \quad x_0^2 + 4y_0^2 = 5$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

40 Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } S_1 : x^2 + 4y^2 < 5 & \text{Continua} \\ 5 & \text{si } x^2 + 4y^2 = 5 \\ 3 & \text{si } S_2 : x^2 + 4y^2 > 5 & \text{Continua} \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

$$S_1 : \{(x, y) / x^2 + 4y^2 < 5\}$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x, y) \in S_1}} f(x, y) = 5$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

41 Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } S_1 : x^2 + 4y^2 < 5 & \text{Continua} \\ 5 & \text{si } x^2 + 4y^2 = 5 \\ 3 & \text{si } S_2 : x^2 + 4y^2 > 5 & \text{Continua} \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

$$S_2 : \{(x, y) / x^2 + 4y^2 > 5\}$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x, y) \in S_2}} f(x, y) = 3$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

42 Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x,y) = 5 \neq 3 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_2}} f(x,y)$$

El Límite no existe

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

43 Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \quad \text{No existe}$$

Para todo  $(x_0, y_0)$  tal que  $x_0^2 + 4y_0^2 = 5$

# Conclusión



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

44 Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{si } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

- ▶  $f(x, y)$  es continua para  $\mathbb{R}^2$  excepto sobre la elipse  $x^2 + 4y^2 = 5$
- ▶  $f(x, y)$  no es continua sobre la elipse  $x^2 + 4y^2 = 5$



## Definición (Continuidad en un Intervalo)

Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es continua en todo  $U$  si solo si es continua en cada punto de  $U$ .

## Teorema

Si  $f$  y  $g$  son continuas en  $x_0$ , entonces también son continuas;  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  y  $\frac{f}{g}$  ( $g(x_0) \neq 0$ ).

# Derivadas Parciales



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

46

**Derivadas Parciales**

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$D_1 f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$D_2 f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Las derivadas parciales existen siempre que sus límites existan. **Notación:**

$$D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 = f_x, \quad D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 = f_y$$

## Nota:

La existencia de las derivadas parciales en un punto no garantiza la continuidad en dicho punto.



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

47

#### Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

### Ejemplo

Si  $f(x, y) = x^2y^3$ , obtener  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$

### Ejemplo

Sea  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

Hallar  $f_x(0, 0)$  y  $f_y(0, 0)$

# Ejemplo

## Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Hallar  $D_1 f(0, 0)$  y  $D_2 f(0, 0)$



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

48

**Derivadas Parciales**

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Solución:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}$$

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x}$$

$$D_1 f(0, 0) = 0$$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

49

### Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

# Solución:



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

50

### Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y}$$

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y}$$

$$D_2 f(0, 0) = 0$$

# Ejemplo



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

51

**Derivadas Parciales**

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2y - y^3}{(x - y)^2}; & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Calcular:  $D_1f(0, 0)$  y  $D_2f(0, 0)$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

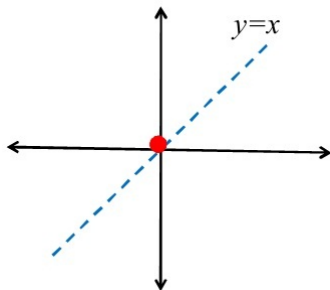
52

### Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita



# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

53

#### Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2y - y^3}{(x - y)^2}; & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}$$

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\Delta x^3}{\Delta x^2} - 0}{\Delta x} = 2$$



- Introducción
- Función real de varias variables
- Dominio y Rango
- Gráfica de funciones de varias variables
- Álgebra de Funciones
- Conjuntos Abiertos y Cerrados
- Límites de una función de varias variables
- Continuidad de funciones de varias variables
- 54 Derivadas Parciales**
- Derivadas Parciales de Orden Superior
- Diferenciabilidad y Diferencial Total
- Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2y - y^3}{(x - y)^2}; & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$$D_2f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y}$$

$$D_2f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\frac{\Delta y^3}{\Delta y^2} - 0}{\Delta y} = -1$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

#### 55 Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2y - y^3}{(x - y)^2}; & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$$D_1 f(0, 0) = 2$$

$$D_2 f(0, 0) = -1$$

# Interpretación Geométrica de la Derivada Parcial



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

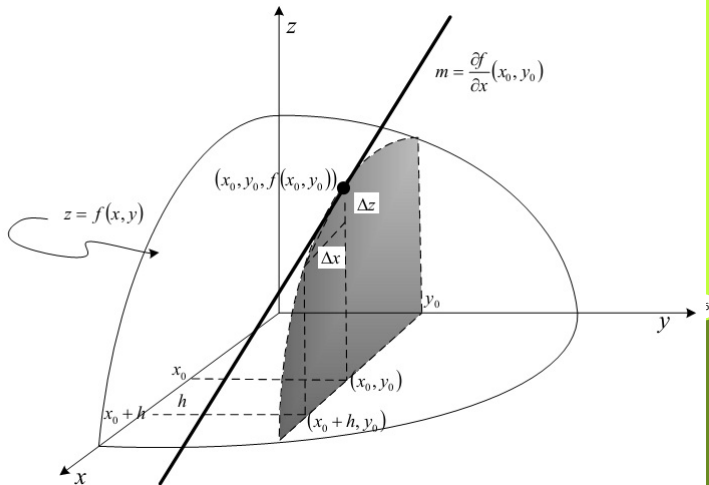
**Derivadas Parciales**

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica





## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

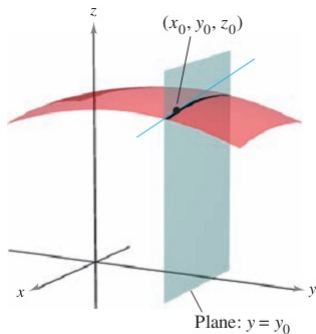
57 **Derivadas Parciales**

Derivadas Parciales de Orden Superior

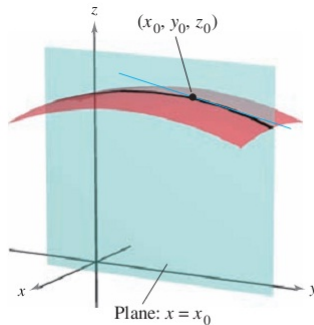
Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{pendiente en la dirección de } x$$



$$\frac{\partial f}{\partial y} = \text{pendiente en la dirección de } y$$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

58

#### Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

Hallar las pendientes de la superficie dada por

$$f(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$$

en el punto  $(1, 2, 1)$ , en las direcciones de  $x$  y de  $y$ .

# Derivadas Parciales de una función de tres o más variables



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

59

**Derivadas Parciales**

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$
$$f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$
$$f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general, si  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , hay  $n$  derivadas parciales denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

# Derivadas Parciales de Orden Superior



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

- ▶ Derivar dos veces con respecto a  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{11}$$

- ▶ Derivar dos veces con respecto a  $y$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f_{22}$$

- ▶ Derivar primero con respecto a  $x$  y luego con respecto a  $y$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = f_{12}$$

60



Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

61

**Derivadas Parciales de Orden Superior**

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

- ▶ Derivar primero con respecto a  $y$  y luego con respecto a  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = f_{21}$$

# Derivada de orden superior



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Definición (Definición de derivada de orden superior)

$$z = f(x, y)$$
$$D_{12}f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{D_1f(x, y + \Delta y) - D_1f(x, y)}{\Delta y}$$

## Definición (Definición de derivada de orden superior)

$$z = f(x, y)$$
$$D_{21}f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{D_2f(x + \Delta x, y) - D_2f(x, y)}{\Delta x}$$

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

62

**Derivadas Parciales de  
Orden Superior**

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

162



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

63

**Derivadas Parciales de Orden Superior**

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

Hallar las derivadas parciales de segundo orden de

$$f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$$

## Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcular  $D_{12}f(0, 0)$  y  $D_{21}f(0, 0)$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

64

**Derivadas Parciales de Orden Superior**

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejercicio

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcular  $D_{12}f(0, 0)$  y  $D_{21}f(0, 0)$

# Teorema



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Teorema

Suponga que  $f$  es una función en las variables  $x$  e  $y$ , que está definida en el disco abierto  $B((x_0, y_0), r)$  y que  $f_x, f_y, f_{xy}$  y  $f_{yx}$  están definidas en  $B$ . Además, suponga que  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son continuas en  $B$ . Entonces

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

## Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcular  $D_{12}f(0, 0)$  y  $D_{21}f(0, 0)$  si existen.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

65

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

162

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

66 **Derivadas Parciales de  
Orden Superior**

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Para  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right] = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Para  $(x, y) = (0, 0)$

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

67

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_{12} f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{D_1 f(0, +\Delta y) - D_1 f(0, 0)}{\Delta y}$$

$$D_{12} f(0, 0) = -1$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

68 Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_{21}f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{D_2f(0 + \Delta x, 0) - D_2f(0, 0)}{\Delta x}$$
$$D_{21}f(0, 0) = 1$$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

69

**Derivadas Parciales de  
Orden Superior**

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_{12}f(0, 0) = -1$$

$$D_{21}f(0, 0) = 1$$

# Diferenciabilidad y Diferencial Total



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

70 Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

## Definición

Si  $f$  es una función de las variables  $x$  e  $y$ , entonces el incremento de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$ , denotado por  $\Delta f(x_0, y_0)$ , está dado por

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

## Definición

Si el incremento de una función se puede expresar como

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde  $\epsilon_1 = \epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$  y  $\epsilon_2 = \epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \epsilon_1 = 0 = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \epsilon_2$$

entonces  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ .

# Ejemplo



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Ejemplo

Hallar una aproximación del valor  $\sqrt{4.04 \times 8.97}$

**Solución:**

$$\Delta x = 0.04, \quad \Delta y = -0.03, \quad f(x, y) = \sqrt{xy}$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$f_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad f_y(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

$$f_x(4, 9) = \frac{3}{4}, \quad f_y(4, 9) = \frac{1}{3}$$

$$f(4 + 0.04, 9 - 0.03) \approx 6 + \frac{3}{4} \times (0.04) + \frac{1}{3} \times (-0.03) = 6.02$$

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

71 Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

72

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Demuestre que la función  $f(x, y) = x^2 + 3y$  es diferenciable para cualquier punto  $(x, y)$*



## Teorema

Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0) \in U$ , si sus derivadas parciales en  $(x_0, y_0)$  existen y si

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

donde

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

74

**Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Demuestre que  $f(x, y) = x^2 + y^2$  es diferenciable en todo  $(x_0, y_0)$ .*



## Ejemplo

Demuestre que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es diferenciable en  $(0, 0)$ .

## Ejemplo

Averigüe la diferenciabilidad en  $(0, 0)$  de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

76

**Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

## Teorema

*Si  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , es diferenciable en  $(x_0, y_0) \in U$ , entonces es continua en  $(x_0, y_0)$*

# Ejemplo



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

77

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La función  $f(x, y)$  es diferenciable en  $(0, 0)$

La función  $f(x, y)$  es continua en  $(0, 0)$

# Observación 1



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

78

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Observación:

Si  $f$  **no es continua** en el punto  $P_0$  entonces  $f$  no es diferenciable en  $P_0$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

79

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{Si } x = 1 \text{ ó } y = 1 \\ 2 & \text{Si } x \neq 1 \text{ y } y \neq 1 \end{cases}$$

*Demuestre que  $f(x, y)$  no es diferenciable en  $(1, 1)$*

# Solucion



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

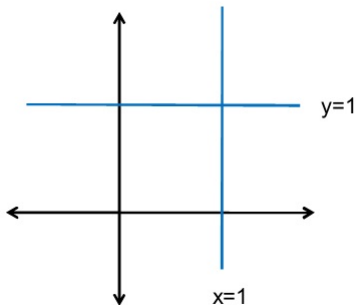
Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

80 Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{Si } x = 1 \text{ ó } y = 1 \\ 2 & \text{Si } x \neq 1 \text{ y } y \neq 1 \end{cases}$$



# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

- Introducción
- Función real de varias variables
- Dominio y Rango
- Gráfica de funciones de varias variables
- Álgebra de Funciones
- Conjuntos Abiertos y Cerrados
- Límites de una función de varias variables
- Continuidad de funciones de varias variables
- Derivadas Parciales
- Derivadas Parciales de Orden Superior
- 81 Diferenciabilidad y Diferencial Total
- Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{Si } x = 1 \text{ ó } y = 1 \\ 2 & \text{Si } x \neq 1 \text{ y } y \neq 1 \end{cases}$$

Veamos que pasa con la continuidad de  $f(x, y)$

1.  $f(1, 1) = 0$
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} 2 = 2$
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = 2 \neq 0 = f(1, 1)$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

82 **Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{Si } x = 1 \text{ ó } y = 1 \\ 2 & \text{Si } x \neq 1 \text{ y } y \neq 1 \end{cases}$$

$f$  no es continua en  $(1, 1)$  entonces  $f$  no es diferenciable en  $(1, 1)$ .

# Observación 2



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

83 **Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

La existencia de las derivadas parciales  $D_1 f(x_0, y_0)$  y  $D_2 f(x_0, y_0)$  de una función de dos variables no garantiza que la función sea diferenciable en  $(x_0, y_0)$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

84

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. Calcule  $D_1f(0, 0)$  y  $D_2f(0, 0)$
2. ¿La función  $f(x, y)$  es diferenciable en  $(0, 0)$ ?

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

85

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

1. Derivadas parciales de  $f(x, y)$  en  $(0, 0)$

$$D_1 f(0, 0) = 0; \quad D_2 f(0, 0) = 0$$

2. La función  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ .

# Conclusiones



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas  
Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

86 Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La función  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$  ...

pero sus derivadas parciales  $D_1f(0, 0) = 0$  y  $D_2f(0, 0) = 0$  existen.



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

87

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

*Si  $f$  es una función  $x$  e  $y$ , para la que  $f_x$  y  $f_y$  son continuas en una región abierta  $R$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $R$ .*

# Ejemplo



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

88 **Diferenciabilidad y Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que la función  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_2 f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

90 Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demostraremos que  $D_1 f(x, y)$  es continua en  $(0, 0)$  es decir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1 f(x, y) = D_1 f(0, 0) = 0$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

91 **Diferenciabilidad y Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería Mecánica

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1 f(x, y) = 0$$

$\forall \epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|D_1(x, y) - 0| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

92 **Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$\left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta = \epsilon$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

93 **Diferenciabilidad y Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$\exists \delta = \frac{\epsilon}{2}$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1 f(x, y) = 0$$

Por lo tanto  $D_1 f(x, y)$  es continua en  $(0, 0)$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

94 **Diferenciabilidad y Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

Usando el procedimiento anterior se puede demostrar que  $D_2f(x, y)$  es continua en  $(0, 0)$

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

# Conclusiones



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

95 Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$D_1f(x, y)$  y  $D_2f(x, y)$  son continuas en  $(0, 0)$

Por lo tanto:

La función  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$

# Observación 3



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

96 **Diferenciabilidad y Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

## Observación:

Es posible que una función  $f$  sea diferenciable en  $P_0$  aunque sus derivadas parciales  $D_1f$  y  $D_2f$  no sean continuas en  $P_0$ .



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

- Introducción
- Función real de varias variables
- Dominio y Rango
- Gráfica de funciones de varias variables
- Álgebra de Funciones
- Conjuntos Abiertos y Cerrados
- Límites de una función de varias variables
- Continuidad de funciones de varias variables
- Derivadas Parciales
- Derivadas Parciales de Orden Superior
- 97 **Diferenciabilidad y Diferencial Total**
- Derivación Parcial Implícita

### Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Demuestre que  $f(x, y)$  es diferenciable y continua en  $(0, 0)$*

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

$(x, y) \neq (0, 0)$

Domínio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

$(x, y) = (0, 0)$

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

$(x, y) \neq (0, 0)$

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

$(x, y) = (0, 0)$

Derivadas Parciales de Orden Superior

98

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_2 f(x, y) = \begin{cases} 2y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

99 Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1 f(x,y)$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left\{ 2x \sin \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right\}$$

$$S : \{(x, y) / y = x, x \geq 0\}$$

# Solución



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

100

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$S : \{(x, y) / y = x, x \geq 0\}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left\{ 2x \sin \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2x \sin \left( \frac{1}{\sqrt{2}|x|} \right) - \frac{x}{\sqrt{2}|x|} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{2}|x|} \right) \right\}$$

162

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

101 **Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$S : \{(x, y) / y = x, x \geq 0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2x \sin \left( \frac{1}{\sqrt{2}|x|} \right) - \frac{x}{\sqrt{2}|x|} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{2}|x|} \right) \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2x \sin \left( \frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \right\} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \right\}$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

102 **Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$S : \{(x, y) / y = x, x \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2x \sin \left( \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) \right\} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) \right\} \\ 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) \right\} \end{aligned}$$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

103 **Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

162

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \right\}$$

Este límite no existe

# Solución



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

104 **Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$S : \{(x, y) / y = x, x \geq 0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2x \sin \left( \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) \right\} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) \right\}$$

0 – No existe

104

162

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1 f(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left\{ 2x \sin \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right\}$$

Este límite no existe

105

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

162

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de dos variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

106

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$D_1 f(x, y)$  No es continua en  $(0, 0)$

162

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Clasificación de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

107

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Siguiendo

el procedimiento anterior se puede demostrar que  $D_2f(x, y) =$

$$\begin{cases} 2y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$D_2f(x, y)$

No es continua en  $(0, 0)$

# Solución



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

108

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

►  $D_1f(x, y)$  y  $D_2f(x, y)$  No son continuas en  $(0, 0)$ .

# Conclusiones



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

109 Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- ▶  $f(x, y)$  es diferenciable en  $(0, 0)$
- ▶  $f(x, y)$  es continua en  $(0, 0)$
- ▶  $D_1f(x, y)$  y  $D_2f(x, y)$  No son continuas en  $(0, 0)$ .

# Regla de la Cadena



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

110 Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

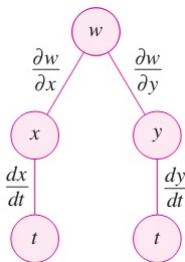
Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

## Teorema

Sea  $w = f(x, y)$ , donde  $f$  es una función derivable de  $x$  e  $y$ .  
Si  $x = g(t)$  y  $y = h(t)$ , donde  $g$  y  $h$  son funciones derivables  
de  $t$ , entonces  $w$  es una función diferenciable de  $t$ , y

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$





## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

111 **Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

Sea  $w = x^2y - y^2$ , donde  $x = \sin t$  ;  $y = e^t$ . Hallar  $\frac{\partial w}{\partial t}$ .



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

112

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Al calentar un cilindro circular recto sólido, su radio  $r$  y altura  $h$  aumentan; por lo tanto, también lo hace el área  $S$  de su superficie. Suponga que en el instante en que  $r = 10$  centímetros y  $h = 100$  centímetros,  $r$  está creciendo a razón de 0.2 centímetros por hora y  $h$  aumenta a 0.5 centímetros por hora. ¿Qué tan rápido crece  $S$  en ese instante?*

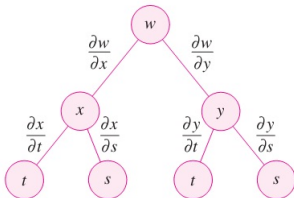


# Teorema

## Teorema

Sea  $w = f(x, y)$ , donde  $f$  es una función diferenciable de  $x$  e  $y$ . Si  $x = g(s, t)$  e  $y = h(s, t)$  son tales que las derivadas parciales de  $\partial x/\partial s$ ,  $\partial x/\partial t$ ,  $\partial y/\partial s$  y  $\partial y/\partial t$ , existen, entonces  $\partial w/\partial s$  y  $\partial w/\partial t$  existen y están dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

## Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

113 Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

162



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

114 **Diferenciabilidad y  
Diferencial Total**

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

Sea  $w = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-y}{yz}\right)$ . Demostrar que:

$$x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

# Derivación Parcial Implícita



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

115

Derivación Parcial Implícita

## Teorema

Si la ecuación  $F(x, y) = 0$  define a  $y$  implícitamente como función derivable de  $x$ , entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0$$

Si la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  define a  $z$  implícitamente como función diferenciable de  $x$  e  $y$ , entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$
$$F_z(x, y, z) \neq 0$$

# Demostración



**Funciones Reales  
de Varias Variables**

**Mg. Hermes  
Pantoja C.**

**Funciones de  
Varias Variables**

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

116 Derivación Parcial Implícita

$$F(x, y, z = 0), \quad z = f(x, y)$$

Si hacemos  $w = F(x, y, z)$ , y aplicamos la regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$

# Demostración



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

117 Derivación Parcial Implícita

$$w = F(x, y, z = 0), \quad z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

# Demostración



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

118 Derivación Parcial Implícita

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$0 = F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$

# Demostración



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

119 Derivación Parcial Implícita

$$w = F(x, y, z) = 0, \quad z = f(x, y)$$

$$0 = F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

120

Derivación Parcial Implícita

### Ejemplo

Encuentre  $y'$  si  $x^3 + y^3 = 6xy$

### Ejemplo

Hallar  $\partial z/\partial x$ , y  $\partial z/\partial y$ , si  $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

162



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

121

Derivación Parcial Implícita

## Ejercicio

Hallar  $\partial z/\partial x$ , y  $\partial z/\partial y$ , si  $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$

162

# Derivada Direccional



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

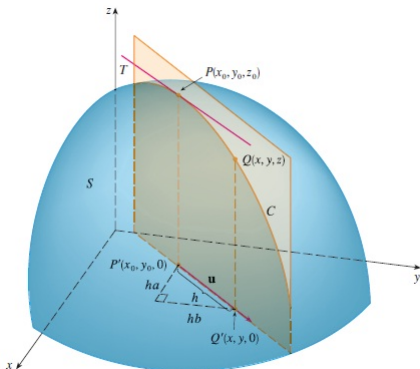
Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

122 Derivación Parcial Implícita



Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

162

# Derivada Direccional



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

123 Derivación Parcial Implícita

## Definición

La derivada direccional de  $f(x, y)$  en el punto  $(x_0, y_0)$  en la dirección del vector unitario  $\mathbf{u}=(a, b)$  se define como

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

siempre que este límite exista.



## Ejemplo

Dada  $f(x, y) = x^2y - 4y^3$ , calcular  $D_{\mathbf{u}}f(2, 1)$  en las direcciones de:

1.  $\mathbf{u} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$

2.  $\mathbf{u}$  en la dirección de  $(2, 1)$  a  $(4, 0)$ .



# Teorema

## Teorema

Si  $f$  es una función diferenciable de  $x$  e  $y$ , entonces  $f$  tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector  $\mathbf{u} = (a, b)$  y

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

## Ejemplo

Encuentre la derivada direccional  $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$  si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y  $\mathbf{u}$  es el vector unitario dado por el ángulo  $\theta = \pi/6$ . ¿Cuál es  $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$

Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

125 Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

162

# Derivada Direccional y Parcial



**Funciones Reales  
de Varias Variables**

**Mg. Hermes  
Pantoja C.**

**Funciones de  
Varias Variables**

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

126 Derivación Parcial Implícita

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} = (1, 0); \quad \theta = 0$$
$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = D_1f(x, y)$$

# Derivada Direccional y Parcial



**Funciones Reales  
de Varias Variables**

**Mg. Hermes  
Pantoja C.**

**Funciones de  
Varias Variables**

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

127 Derivación Parcial Implícita

$$\mathbf{u} = \mathbf{j} = (0, 1); \quad \theta = \pi/2$$

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = D_2f(x, y)$$



## Definición

El gradiente de  $f(x, y)$  es la función vectorial

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$\nabla f(x, y) = \text{grad } f(x, y)$$

supuestos que las dos derivadas parciales existen

## Ejemplo

Hallar el gradiente de  $f(x, y) = y \ln x + xy^2$  en el punto  
(1, 2)



## Definición

Sea  $f(x, y)$  una función diferenciable y  $u$  un vector unitario,  
Entonces

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u$$

## Ejemplo

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$$

en  $(-\frac{3}{4}, 0)$ , en la dirección de  $P(-\frac{3}{4}, 0)$  a  $Q(0, 1)$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

130

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

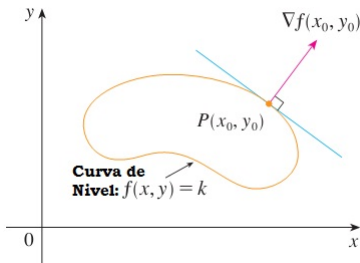
*Demostrar que  $f$  tiene derivada direccional en  $(0, 0)$  pero no es diferenciable en ese punto.*

162



## Teorema

*El Gradiente es normal a las curvas de nivel de  $z = f(x, y)$ .*



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

131 Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

162



## Teorema

Sea  $f$  diferenciable en el punto  $(x, y)$

1. Si  $\nabla f(x, y) = 0$ , entonces  $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$  para todo  $\mathbf{u}$ .
2. La dirección de máximo incremento de  $f$  está dada por  $\nabla f(x, y)$ . El valor máximo de  $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$  es  $\|\nabla f(x, y)\|$ .
3. La dirección de mínimo incremento de  $f$  está dada por  $-\nabla f(x, y)$ . El valor mínimo de  $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$  es  $-\|\nabla f(x, y)\|$ .

# Ejemplo



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

133 Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Una partícula está situada en el punto  $P(-2, 1)$  de una placa metálica cuya temperatura viene dada por*

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

*donde  $x$  e  $y$  se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de  $(2, -3)$  aumenta más rápido la temperatura?, ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento?*

162



## Ejemplo

Un rastreador térmico se encuentra en el punto  $(2, -3)$  sobre una placa metálica cuya temperatura en  $(x, y)$  es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

Hallar la trayectoria del rastreador, si éste se mueve continuamente en dirección de máximo incremento de temperatura.

# Planos Tangentes

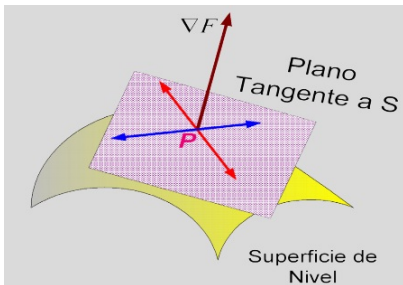


Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Definición

Supongamos que  $F(x, y, z) = k$  determina una superficie  $S$  y que  $F$  es diferenciable en el punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  de esta superficie, con  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Entonces el plano que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  es el **plano tangente** a la superficie  $S$  en  $P$ .



Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

135

Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

162



## Teorema

### Teorema

Para la superficie  $F(x, y, z) = k$ , la ecuación del plano tangente en  $(x_0, y_0, z_0)$  es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

es decir

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

En particular, para la superficie  $z = f(x, y)$ , la ecuación del plano tangente en  $(x_0, y_0, z_0)$  es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

136

Derivación Parcial Implícita

# Continuación...



**Funciones Reales  
de Varias Variables**

**Mg. Hermes  
Pantoja C.**

## Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

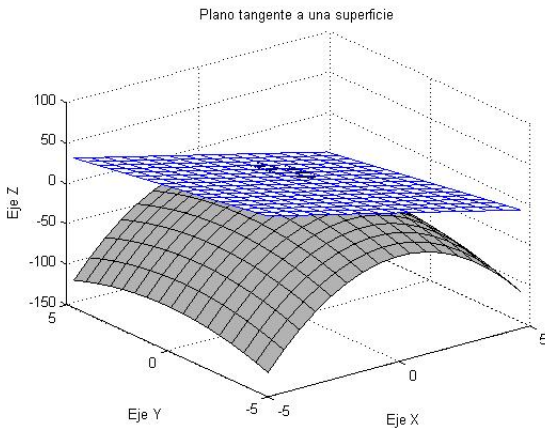
Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

137 Derivación Parcial Implícita





## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

138

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

Determine la ecuación del plano tangente a la superficie  
 $x^2 + y^2 + 2z^2 = 23$  en  $(1, 2, 3)$ .

## Ejemplo

Determinar la ecuación del plano tangente a  $z = x^2 + y^2$  en  
el punto  $(1, 1, 2)$

162



## Definición

Supongamos que  $F(x, y, z) = k$  determina una superficie  $S$  y que  $F$  es diferenciable en el punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  de esta superficie, con  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Entonces la recta que pasa por  $P$  y tiene la dirección de  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  se le llama recta normal a  $S$  en  $P$ .

## Definición (Ecuaciones Simétricas de la recta Normal a $S$ en $P$ )

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

140

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie dada por  $xyz = 12$  en el punto  $(2, -2, -3)$ .*



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

141

Derivación Parcial Implícita

## Teorema

*Si  $F$  es diferenciable en  $(x_0, y_0, z_0)$  y  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , entonces  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  es normal a la superficie de nivel que pasa por  $(x_0, y_0, z_0)$*

# Extremo de funciones de dos variables



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

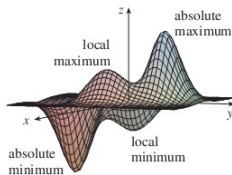
142 Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

## Teorema

Sea  $f$  una función continua de dos variables  $x$  e  $y$  definida en una región acotada cerrada  $D$  en el plano  $XY$

1. Existe por lo menos un punto en  $D$ , en el que  $f$  toma un valor mínimo.
2. Existe por lo menos un punto en  $D$ , en el que  $f$  toma un valor máximo.





## Definición

Sea  $f$  una función definida en una región  $D$  que contiene  $(x_0, y_0)$

1. La función  $f$  tiene un **mínimo relativo** en  $(x_0, y_0)$  si existe una bola abierta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$  tal que

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta))$$

2. La función  $f$  tiene un **máximo relativo** en  $(x_0, y_0)$  si existe una bola abierta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$  tal que

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta))$$



## Definición (Puntos críticos)

Sea  $f$  definida en una región abierta  $D$  que contiene a  $(x_0, y_0)$ . El punto  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico de  $f$  si en él se da alguna de estas circunstancias:

1.  $f_x(x_0, y_0) = 0$  y  $f_y(x_0, y_0) = 0$
2.  $f_x(x_0, y_0)$  o  $f_y(x_0, y_0)$  no existen.

# Los extremos relativos sólo pueden ocurrir en puntos críticos



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

145

Derivación Parcial Implícita

Si  $f$  está definida en una región  $D$  y tiene en  $(x_0, y_0)$  un extremo relativo, entonces  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico de  $f$ .

Si  $f$  está definida en una región abierta  $D$  y tiene en  $(x_0, y_0)$  un punto crítico de  $f$ , entonces  $(x_0, y_0)$  puede ser o no un extremo relativo de  $f$ .



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

146

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Hallar los extremos relativos de*

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$$



## Teorema (EL criterio de las segundas derivadas parciales)

Sea  $f$  una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene al punto  $(x_0, y_0)$  en el cual

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

Para buscar los extremos relativos de  $f$ , sea

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

Entonces



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

148

Derivación Parcial Implícita

162

1. Si  $D > 0$  y  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , entonces  $f(x_0, y_0)$  es un valor máximo local.
2. Si  $D > 0$  y  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , entonces  $f(x_0, y_0)$  es un valor mínimo local.
3. Si  $D < 0$ , entonces  $f(x_0, y_0)$  no es un valor máximo extremo (punto de silla).
4. Si  $D = 0$ , el criterio no es concluyente.



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

149 Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

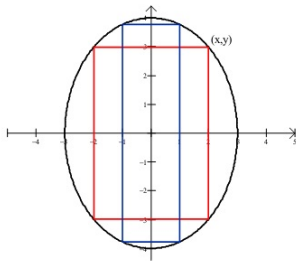
Determinar los extremos, si existen, de la función  $F$  definida como  $F(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$

# Multiplicadores de Lagrange



Deseamos hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$



Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes Pantoja C.

Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

150 Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería Mecánica

162

# Multiplicadores de Lagrange



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

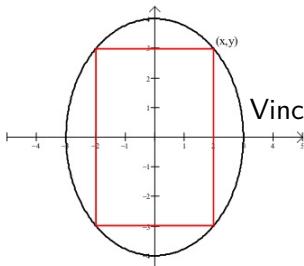
151 Derivación Parcial Implícita

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

El rectángulo tiene lados  $2x$  y  $2y$

Función objetivo

$$f(x, y) = 4xy$$



Vínculo o ligadura

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

162

# Multiplicadores de Lagrange



**Funciones Reales  
de Varias Variables**

**Mg. Hermes  
Pantoja C.**

**Funciones de  
Varias Variables**

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

152

**Derivación Parcial Implícita**

Interpretamos la ecuación de ligadura

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

como una curva de nivel fija de

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2}$$

# Multiplicadores de Lagrange



**Funciones Reales  
de Varias Variables**

**Mg. Hermes  
Pantoja C.**

**Funciones de  
Varias Variables**

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

153

Derivación Parcial Implícita

Las curvas de nivel de  $f$

$$f(x, y) = 4xy = k$$

es una familia de hipérbolas.

Las curvas de nivel de  $f$  en las que hay puntos que satisfacen la ligadura o el vínculo corresponden a las hipérbolas que cortan a la elipse.

# Multiplicadores de Lagrange



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

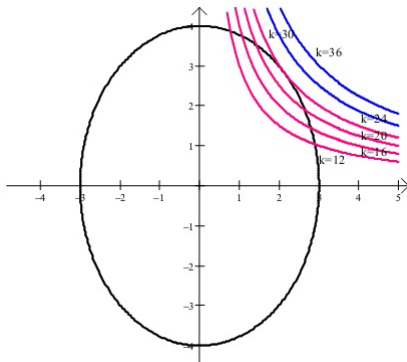
Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

154 Derivación Parcial Implícita



Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

162

# Multiplicadores de Lagrange



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

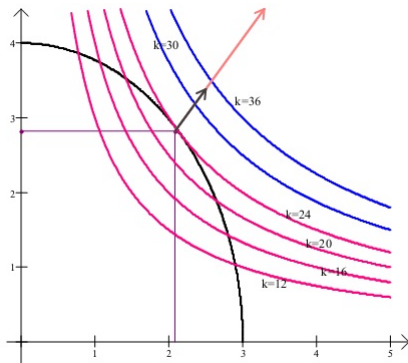
Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

155 Derivación Parcial Implícita





## Teorema (Lagrange)

Sean  $f$  y  $g$  funciones con primeras derivadas parciales continuas, tales que  $f$  tiene un extremo en el punto  $(x_0, y_0)$  sobre la curva suave de ligadura  $g(x, y) = c$ .

Si  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$  existe un número  $\lambda$  tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

# Método de los multiplicadores de Lagrange



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

157

Derivación Parcial Implícita

Sean  $f$  y  $g$  que satisfacen el teorema de Lagrange, tales que  $f$  tiene un extremo sujeto a la condición  $g(x, y) = c$ . Para hallar el mínimo o el máximo de  $f$ , basta proceder como sigue:

- ▶ Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) &= c\end{aligned}$$

- ▶ Evaluar  $f$  en cada uno de los puntos solución obtenidos en el paso anterior. El mayor de esos valores da el máximo de  $f$  sujeta a la ligadura y el menor da el mínimo de  $f$  sujeta a la ligadura.

162

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Cálculo de los extremos absolutos



Funciones Reales  
de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Funciones de  
Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

158

Derivación Parcial Implícita

Sea  $z = f(x, y)$  una función de dos variables definida y continua en una región cerrada y acotada  $D$  del plano  $XY$  entonces  $f$  alcanza su máximo y mínimo absoluto

- ▶ En los puntos fronteras de  $D$ .
- ▶ En los puntos críticos de  $f$  en el interior de  $D$ .

Comparando los valores se determinan el valor máximo absoluto y el mínimo absoluto de  $f$  en  $D$ .



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

159

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*¿Cuál es la máxima área que puede tener un rectángulo si la longitud de su diagonal es 2?*

162



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

160

Derivación Parcial Implícita

## Ejemplo

*Hallar el mínimo valor de*

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$$

*sujeta a:*

$$2x - 3y - 4z - 49 = 0$$

# Optimización con una desigualdad como restricción



**Funciones Reales  
de Varias Variables**

**Mg. Hermes  
Pantoja C.**

**Funciones de  
Varias Variables**

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Gráfica de funciones de  
varias variables

Álgebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

161 Derivación Parcial Implícita

Para hallar los valores extremos de la función  $f(x, y)$  sujeta a la restricción  $g(x, y) \leq 0$ . Seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallar los puntos críticos que satisface la restricción.
2. Hallar los valores extremos de la función frontera  $g(x, y) = 0$ .

Finalmente comparamos los resultados.

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

162



## Funciones Reales de Varias Variables

Mg. Hermes  
Pantoja C.

### Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias  
variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de  
varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y  
Cerrados

Límites de una función de  
varias variables

Continuidad de funciones  
de varias variables

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de  
Orden Superior

Diferenciabilidad y  
Diferencial Total

162

Derivación Parcial Implícita

162

## Ejemplo

*La temperatura en los puntos  $(x, y)$  de una lámina metálica de forma elíptica limitada por  $x^2 + 4y^2 \leq 24$ , viene dada por  $T(x, y) = x^2 + 2x + y^2$ . Hallar la temperatura máxima y mínima.*