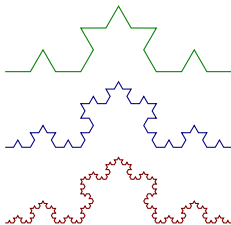


Funciones Reales de Varias Variables

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Industrial
Universidad Nacional Mayor de San Marcos



Matemática II





CONTENIDO

Funciones de Varias Variables

Introducción

Función real de varias variables

Dominio y Rango

Grafica de funciones de varias variables

Algebra de Funciones

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Límites de una función de varias variables

Continuidad de funciones de varias variables

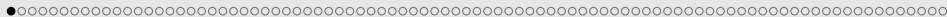
Derivadas Parciales

Derivadas Parciales de Orden Superior

Diferenciabilidad y Diferencial Total

Derivación Parcial Implícita





NOTA HISTÓRICA

Sonya Kovalevsky (1850-1891). Gran parte de la terminología usada para definir límites y continuidad de una función de dos o tres variables la introdujo el matemático alemán **Karl Weierstrass** (1815-1897). El enfoque riguroso de Weierstrass a los límites y a otros temas en cálculo le valió la reputación de “padre del análisis moderno”. Weierstrass era un maestro excelente. Una de sus alumnas fue la matemática rusa Sonya, quien aplicó muchas de las técnicas de Weierstrass a problemas de la física matemática y se convirtió en una de las primeras mujeres aceptada como investigadora matemática.

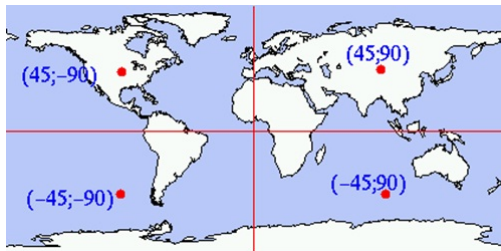


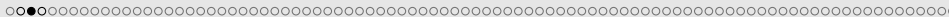


FUNCIÓN REAL DE DOS VARIABLES

La temperatura T en un punto en la superficie terrestre en cualquier tiempo depende de la latitud x y la longitud y del punto. Podemos considerar

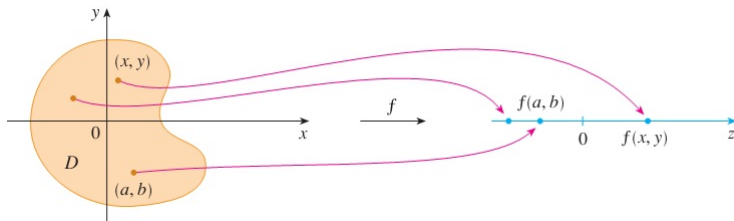
$$T = f(x, y)$$

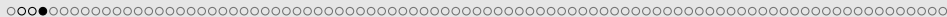




Definición

Una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D , un número real único denotado por $f(x, y)$



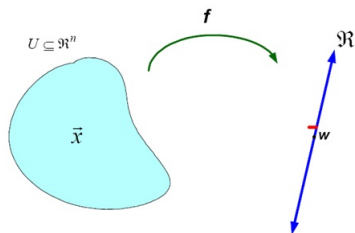


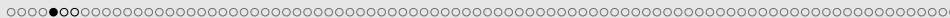
FUNCIÓN REAL DE n VARIABLES

Definición

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de n -uplas. Si a cada n -upla de U diferente le corresponde un número real w , entonces se dice que f es función de \mathbf{x}

$$\begin{array}{ccc}
 f : U \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 \mathbf{x} & \rightarrow & w \\
 & & w = f(\mathbf{x})
 \end{array}$$





DOMINIO

Definición (Dominio)

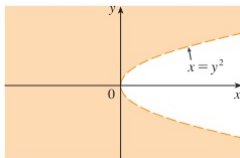
$$\text{Dom}(f) = \{x \in U \subset \mathbb{R}^n \mid \exists w \in \mathbb{R} \wedge w = f(x)\}$$

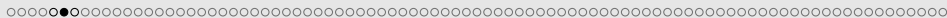
Ejemplo

Hallar el dominio de la siguiente función $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

Solución:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^2\}$$





RANGO

Definición (Rango)

$$\text{Rang}(f) = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \text{Dom}(f)\}$$

Ejemplo

Hallar el rango de la siguiente función $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Solución:

$$0 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow -x^2 - y^2 \leq 0 \Rightarrow 9 - x^2 - y^2 \leq 9$$

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \underbrace{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}_{f(x,y)} \leq 3$$

$$\text{Rang}(f) = [0, 3]$$





EJERCICIOS

Hallar el dominio de las funciones

1. $f(x, y) = \frac{1}{xy}$

2. $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - y^2}}$

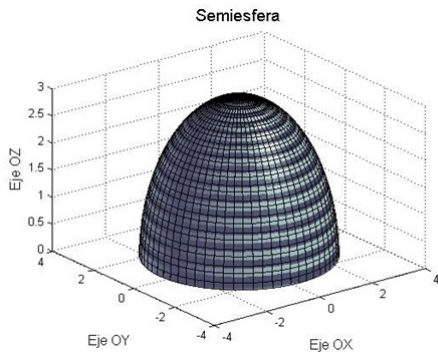


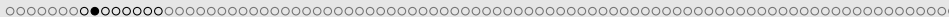


Definición

Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, el **gráfico de f** es un conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 :

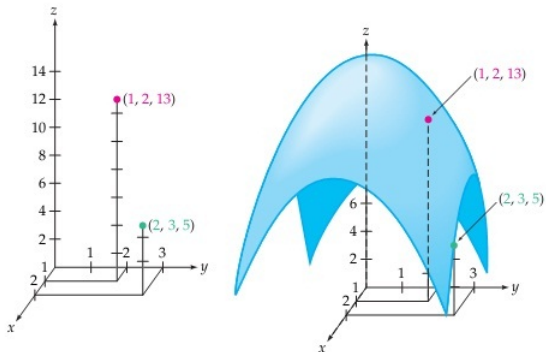
$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}$$





Ejemplo

$$\text{Graficar } f(x, y) = 18 - x^2 - y^2$$

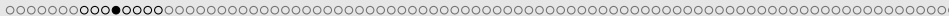




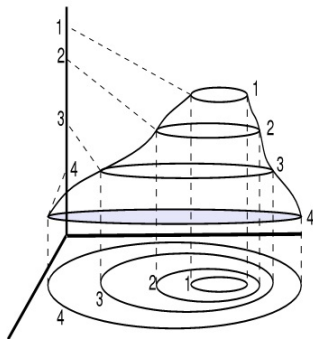
CURVAS DE NIVEL

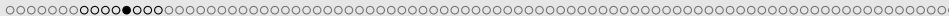
Suponga que la superficie $z = f(x, y)$ se intersecta con el plano $z = c$, y que la curva de intersección se proyecta sobre el plano XY . Esta curva proyectada tiene a $f(x, y) = c$ como su ecuación, y la curva se denomina curva de nivel de la función f en c . Cada punto de la curva de nivel corresponde a sólo un punto de la superficie que se encuentra a c unidades de ella.





CURVAS DE NIVEL

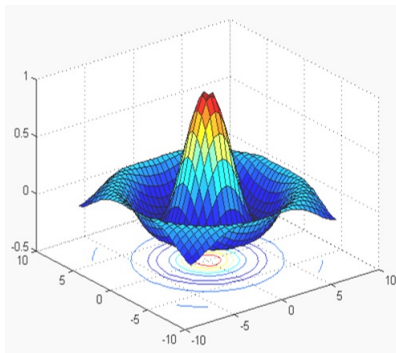


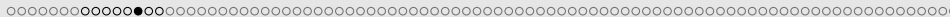


Ejemplo

Graficar las curvas de nivel de la función

$$z = f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$





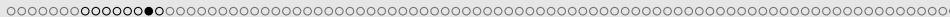
EJERCICIOS

Hallar las curvas de nivel de las superficies

1. $z = 2x + y - 1$

2. $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

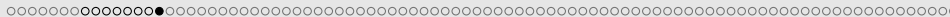




SUPERFICIE DE NIVEL

El concepto de curva de nivel puede extenderse una dimensión para definir una **superficie de nivel**. Si f es una función de tres variables y c es una constante, la gráfica de la ecuación $f(x, y, z) = c$ es una **superficie de nivel** de la función f .



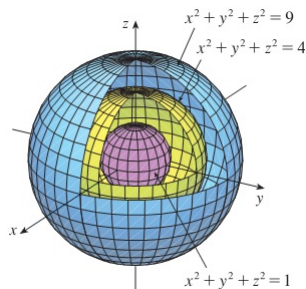


Ejemplo

Encontrar las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Solución:





ALGEBRA DE FUNCIONES

Sean

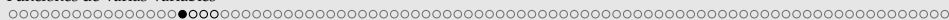
$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Con dominios U y V respectivamente, definimos

1. $(f \pm g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x}) \quad \text{Dom}(f \pm g) = U \cap V$
2. $(f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) \quad \text{Dom}(f \cdot g) = U \cap V$
3. $(f/g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x}) \quad \text{Dom}(f/g) = U \cap V - \{\mathbf{x} / g(\mathbf{x}) = 0\}$





CONCEPTOS PREVIOS

Si $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$, el conjunto

$$B(\mathbf{x}_0; \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n / \|P - \mathbf{x}_0\| < \delta\}$$

se llama **bola abierta** de centro \mathbf{x}_0 y radio δ .

El conjunto

$$B'(\mathbf{x}_0; \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n / \|P - \mathbf{x}_0\| < \delta\} - \{\mathbf{x}_0\}$$

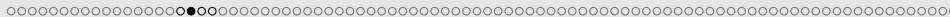
Se llama **bola abierta reducida**.

El conjunto

$$\bar{B}(\mathbf{x}_0; \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n / \|P - \mathbf{x}_0\| \leq \delta\}$$

Se llama **bola cerrada**.





CONCEPTOS PREVIOS

Definición

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es abierto

$$\iff \forall \mathbf{x} \in D, \exists \delta > 0 / B(\mathbf{x}, \delta) \subset D$$

Definición

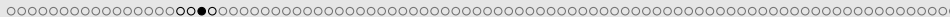
Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado \iff el complemento de S es abierto.

Definición

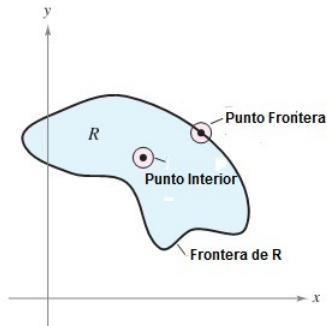
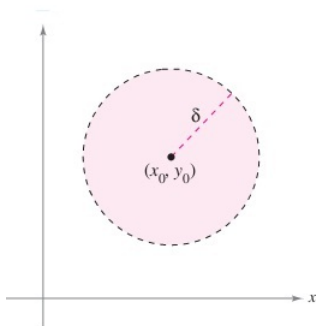
Sea $D \subset \mathbb{R}^n$; el punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de D si

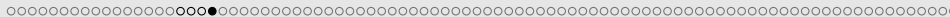
$$\forall \epsilon > 0, B'(x_0, \epsilon) \cap D \neq \Phi$$



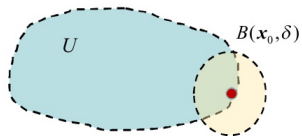


BOLA ABIERTA - PUNTO INTERIOR - PUNTO FRONTERA



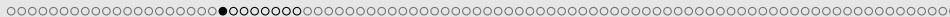


PUNTO DE ACUMULACIÓN



$$B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap U \neq \Phi$$





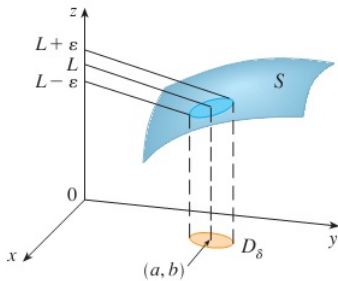
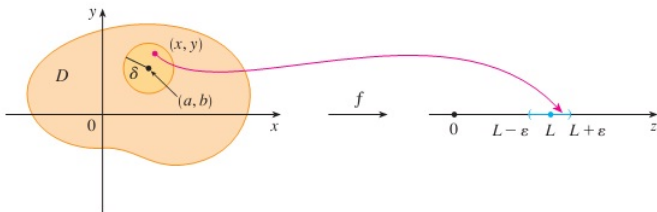
LÍMITES DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

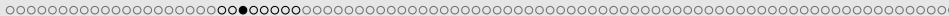
Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ punto de acumulación de D y L un número real. Se dice que el límite en \mathbf{x}_0 es L .

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(x) = L$$

$$\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$





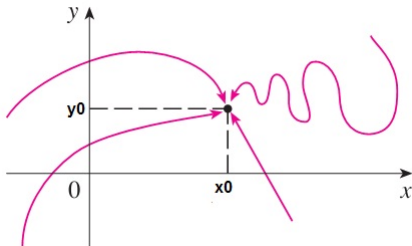


Ejemplo

Demostrar

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + y^2) = 2 \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} 2xy + y^2 = 8$$





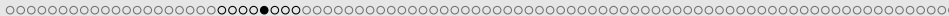
Teorema

Sea S_1 y S_2 conjuntos en \mathbb{R}^2 que tienen al punto (x_0, y_0) como un punto de acumulación y si

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \in S_1)}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (P \in S_2)}} f(x,y)$$

entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe.





Ejemplo

Determinar si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

existe

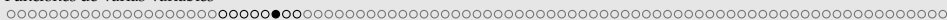
Ejemplo

Determinar si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

existe





PROPIEDADES DE LÍMITES

Sean

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Con dominios U y V respectivamente, tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existen y si x_0 es un punto de acumulación de $U \cap V$, entonces

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f/g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$





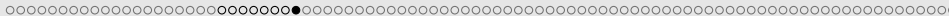
Teorema

Sean g, f y h funciones de n variables definidas en una bola abierta $B(\mathbf{x}_0; r)$, excepto tal vez en \mathbf{x}_0 mismo, tal que

$$g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0; r)$$

y si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x})$ entonces, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ existe y

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

Ejemplo

Sea

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ si existe.

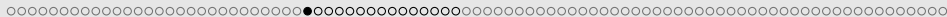
Ejemplo

Sea

$$f(x, y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

Hallar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ si existe.





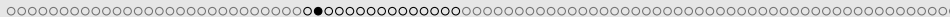
CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en U , se dice f es continua en $x_0 \in U$ si cumple las siguientes condiciones

1. $f(x_0)$ existe
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$





TIPOS DE DISCONTINUIDAD

► **Discontinuidad removable**

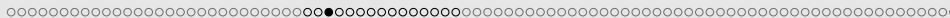
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L \text{ existe}$$

Se redefine f en (x_0, y_0) como L

► **Discontinuidad esencial**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ no existe.}$$





EJEMPLOS

Ejemplo

Analizar la continuidad de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

En el punto (0, 0)





EJEMPLOS

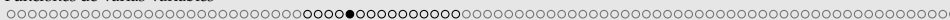
Ejemplo

Analizar la continuidad de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

En el punto (0, 0)





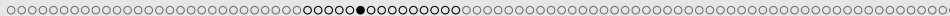
EJERCICIO

Analizar la continuidad de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x(x^2 + y^2)}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

En el punto $(0, 0)$





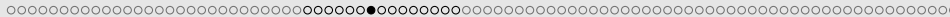
EJEMPLO

Ejemplo

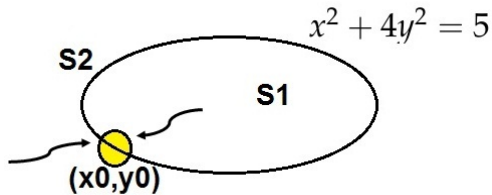
Analizar la continuidad de la siguiente función:

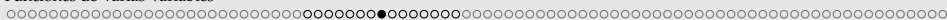
$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{si } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$





SOLUCIÓN



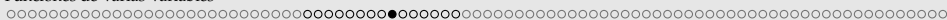


SOLUCIÓN

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{si } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } x^2 + 4y^2 < 5 & \text{Continua} \\ 5 & \text{si } x^2 + 4y^2 = 5 \\ 3 & \text{si } x^2 + 4y^2 > 5 & \text{Continua} \end{cases}$$





SOLUCIÓN

Analizaremos la continuidad de $f(x, y)$ sobre la elipse
 $x^2 + 4y^2 = 5$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } S_1 : x^2 + 4y^2 < 5 & \text{Continua} \\ 5 & \text{si } x^2 + 4y^2 = 5 \\ 3 & \text{si } S_2 : x^2 + 4y^2 > 5 & \text{Continua} \end{cases}$$

$$f(x_0, y_0) = 5, \quad x_0^2 + 4y_0^2 = 5$$





SOLUCIÓN

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } S_1 : x^2 + 4y^2 < 5 & \text{Continua} \\ 5 & \text{si } x^2 + 4y^2 = 5 \\ 3 & \text{si } S_2 : x^2 + 4y^2 > 5 & \text{Continua} \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

$$S_1 : \{(x, y) / x^2 + 4y^2 < 5\}$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x, y) \in S_1}} f(x, y) = 5$$



SOLUCIÓN

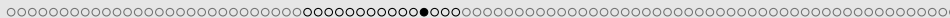
$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } S_1 : x^2 + 4y^2 < 5 \quad \text{Continua} \\ 5 & \text{si } x^2 + 4y^2 = 5 \\ 3 & \text{si } S_2 : x^2 + 4y^2 > 5 \quad \text{Continua} \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

$$S_2 : \{(x, y) / x^2 + 4y^2 > 5\}$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x, y) \in S_2}} f(x, y) = 3$$



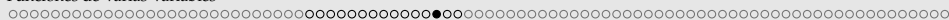


SOLUCIÓN

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x,y) = 5 \neq 3 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_2}} f(x,y)$$

El Límite no existe



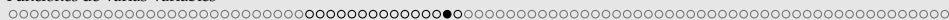


SOLUCIÓN

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \quad \text{No existe}$$

Para todo (x_0, y_0) tal que $x_0^2 + 4y_0^2 = 5$



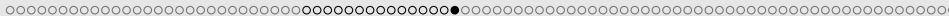


CONCLUSIÓN

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{si } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

- ▶ $f(x, y)$ es continua para \mathbb{R}^2 excepto sobre la elipse $x^2 + 4y^2 = 5$
- ▶ $f(x, y)$ no es continua sobre la elipse $x^2 + 4y^2 = 5$





Definición (Continuidad en un Intervalo)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es continua en todo U si solo si es continua en cada punto de U .

Teorema

Si f y g son continuas en x_0 , entonces también son continuas;

$$f \pm g, f \cdot g \text{ y } \frac{f}{g} \quad (g(x_0) \neq 0).$$





DERIVADAS PARCIALES

$$D_1f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$D_2f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Las derivadas parciales existen siempre que sus límites existan.

Notación:

$$D_1f = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 = f_x, \quad D_2f = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 = f_y$$

Nota:

La existencia de las derivadas parciales en un punto no garantiza la continuidad en dicho punto.



Ejemplo

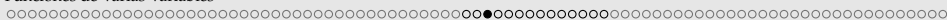
Si $f(x, y) = x^2y^3$, obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$





EJEMPLO

Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Hallar $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$





SOLUCIÓN:

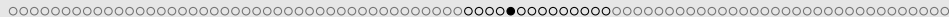
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_1f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}$$

$$D_1f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x}$$

$$D_1f(0, 0) = 0$$





SOLUCIÓN:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_2f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y}$$

$$D_2f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y}$$

$$D_2f(0, 0) = 0$$



EJEMPLO

Ejemplo

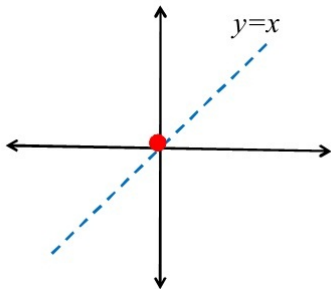
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2y - y^3}{(x - y)^2}; & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Calcular: $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$





SOLUCIÓN



SOLUCIÓN

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2y - y^3}{(x - y)^2}; & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$$D_1f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}$$

$$D_1f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\Delta x^3}{\Delta x^2} - 0}{\Delta x} = 2$$



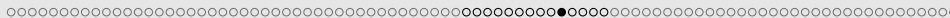
SOLUCIÓN

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2y - y^3}{(x - y)^2}; & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$$D_2f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y}$$

$$D_2f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\frac{\Delta y^3}{\Delta y^2} - 0}{\Delta y} = -1$$





SOLUCIÓN

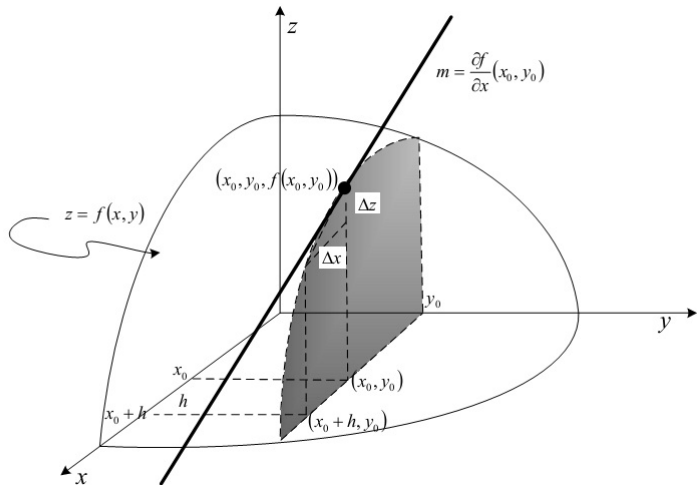
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 3x^2y - y^3}{(x - y)^2}; & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

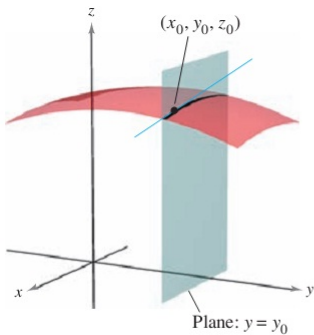
$$D_1f(0, 0) = 2$$

$$D_2f(0, 0) = -1$$

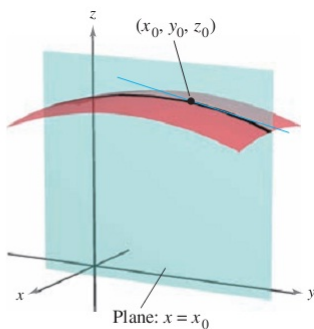


INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA PARCIAL



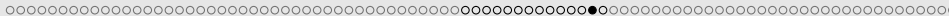


$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{pendiente en la dirección de } x$$



$$\frac{\partial f}{\partial y} = \text{pendiente en la dirección de } y$$





Ejemplo

Hallar las pendientes de la superficie dada por

$$f(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$$

en el punto $(1, 2, 1)$, en las direcciones de x y de y .



DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE TRES O MÁS VARIABLES

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

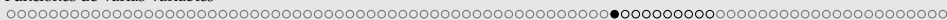
$$f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general, si $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, hay n derivadas parciales denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n$$





DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

- ▶ Derivar dos veces con respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{11}$$

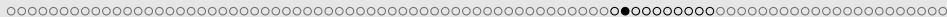
- ▶ Derivar dos veces con respecto a y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f_{22}$$

- ▶ Derivar primero con respecto a x y luego con respecto a y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = f_{12}$$





- ▶ Derivar primero con respecto a y y luego con respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = f_{21}$$



Definición (Definición de derivada de orden superior)

$$z = f(x, y)$$

$$D_{12}f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{D_1f(x, y + \Delta y) - D_1f(x, y)}{\Delta y}$$

Definición (Definición de derivada de orden superior)

$$z = f(x, y)$$

$$D_{21}f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{D_2f(x + \Delta x, y) - D_2f(x, y)}{\Delta x}$$





Ejemplo

Hallar las derivadas parciales de segundo orden de

$$f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$$

Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcular $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$





Ejercicio

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcular $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$



Teorema

Suponga que f es una función en las variables x e y , que está definida en el disco abierto $B((x_0, y_0), r)$ y que f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en B . Además, suponga que f_{xy} y f_{yx} son continuas en B . Entonces

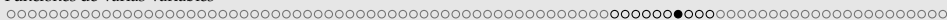
$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcular $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$ si existen.





SOLUCIÓN

Para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right] = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Para $(x, y) = (0, 0)$

$$D_1f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$



SOLUCIÓN

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_{12}f(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{D_1f(0, +\Delta y) - D_1f(0, 0)}{\Delta y}$$

$$D_{12}f(0, 0) = -1$$

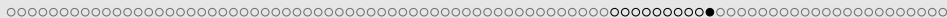


SOLUCIÓN

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_{21}f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{D_2f(0 + \Delta x, 0) - D_2f(0, 0)}{\Delta x}$$
$$D_{21}f(0, 0) = 1$$





SOLUCIÓN

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_{12}f(0, 0) = -1$$

$$D_{21}f(0, 0) = 1$$



DIFERENCIABILIDAD Y DIFERENCIAL TOTAL

Definición

Si f es una función de las variables x e y , entonces el incremento de f en el punto (x_0, y_0) , denotado por $\Delta f(x_0, y_0)$, está dado por

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Definición

Si el incremento de una función se puede expresar como

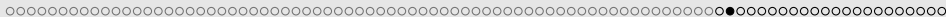
$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde $\epsilon_1 = \epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\epsilon_2 = \epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \epsilon_1 = 0 = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \epsilon_2$$

entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) .





Ejemplo

Hallar una aproximación del valor $\sqrt{4,04 \times 8,97}$

Solución:

$$\Delta x = 0,04, \quad \Delta y = -0,03, \quad f(x, y) = \sqrt{xy}$$

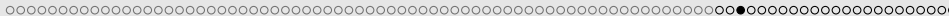
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$f_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad f_y(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

$$f_x(4, 9) = \frac{3}{4}, \quad f_y(4, 9) = \frac{1}{3}$$

$$f(4 + 0,04, 9 - 0,03) \approx 6 + \frac{3}{4} \times (0,04) + \frac{1}{3} \times (-0,03) = 6,02$$

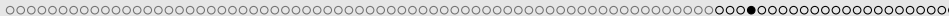




Ejemplo

Demuestre que la función $f(x, y) = x^2 + 3y$ es diferenciable para cualquier punto (x, y)





Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f es diferenciable en $(x_0, y_0) \in U$, si sus derivadas parciales en (x_0, y_0) existen y si

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

donde

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$





Ejemplo

Demuestre que $f(x, y) = x^2 + y^2$ es diferenciable en todo (x_0, y_0) .





Ejemplo

$$\text{Demuestre que la función } f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es diferenciable en $(0, 0)$.

Ejemplo

Averigue la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$





Teorema

Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, es diferenciable en $(x_0, y_0) \in U$, entonces es continua en (x_0, y_0)





EJEMPLO

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La función $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$

La función $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$



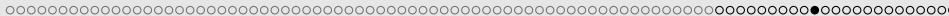


OBSERVACIÓN 1

Observación:

Si f no es continua en el punto P_0 entonces f no es diferenciable en P_0





Ejemplo

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{Si } x = 1 \text{ ó } y = 1 \\ 2 & \text{Si } x \neq 1 \text{ y } y \neq 1 \end{cases}$$

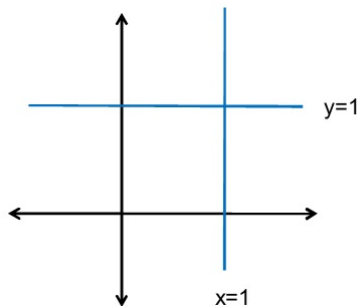
Demuestre que $f(x, y)$ no es diferenciable en $(1, 1)$

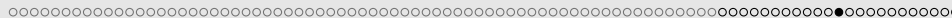




SOLUCION

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{Si } x = 1 \text{ ó } y = 1 \\ 2 & \text{Si } x \neq 1 \text{ y } y \neq 1 \end{cases}$$





SOLUCIÓN

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{Si } x = 1 \text{ ó } y = 1 \\ 2 & \text{Si } x \neq 1 \text{ y } y \neq 1 \end{cases}$$

Veamos que pasa con la continuidad de $f(x, y)$

1. $f(1, 1) = 0$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} 2 = 2$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = 2 \neq 0 = f(1, 1)$



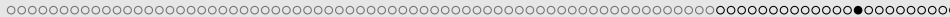


SOLUCIÓN

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{Si } x = 1 \text{ ó } y = 1 \\ 2 & \text{Si } x \neq 1 \text{ y } y \neq 1 \end{cases}$$

f no es continua en $(1, 1)$ entonces f no es diferenciable en $(1, 1)$.

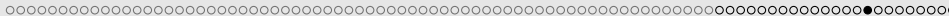




OBSERVACIÓN 2

La existencia de las derivadas parciales $D_1f(x_0, y_0)$ y $D_2f(x_0, y_0)$ de una función de dos variables no garantiza que la función sea diferenciable en (x_0, y_0)





Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

1. Calcule $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$
2. ¿La función $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$?





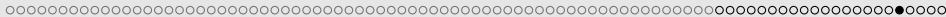
CONCLUSIONES

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La función f no es diferenciable en $(0, 0)$...

pero sus derivadas parciales $D_1f(0, 0) = 0$ y $D_2f(0, 0) = 0$ existen.

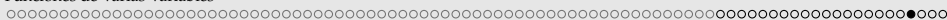




Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Si f es una función x e y , para la que f_x y f_y son continuas en una región abierta R , entonces f es diferenciable en R .



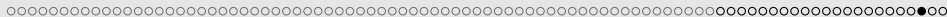


EJEMPLO

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que la función f es diferenciable en $(0, 0)$





SOLUCIÓN

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_2 f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$





SOLUCIÓN

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demostraremos que $D_1f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$ es decir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1f(x, y) = D_1f(0, 0) = 0$$





SOLUCIÓN

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1 f(x, y) = 0$$

$\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|D_1(x, y) - 0| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$



$$\left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta = \epsilon$$



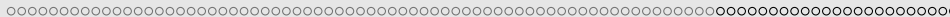
SOLUCIÓN

$$\exists \delta = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1 f(x, y) = 0$$

Por lo tanto $D_1 f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$





SOLUCIÓN

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Usando el procedimiento anterior se puede demostrar que $D_2f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$





CONCLUSIONES

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

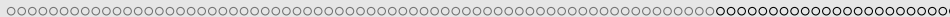
$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$D_1f(x, y)$ y $D_2f(x, y)$ son continuas en $(0, 0)$

Por lo tanto:

La función f es diferenciable en $(0, 0)$



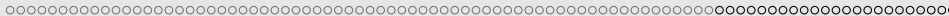


OBSERVACIÓN 3

Observación:

Es posible que una función f sea diferenciable en P_0 aunque sus derivadas parciales D_1f y D_2f no sean continuas en P_0 .





Ejemplo

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que $f(x, y)$ es diferenciable y continua en $(0, 0)$



SOLUCIÓN

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} 2y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



SOLUCIÓN

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1 f(x, y)$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left\{ 2x \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right\}$$

$$S : \{(x, y) / y = x, x \geq 0\}$$



SOLUCIÓN

$$S : \{(x, y) / y = x, x \geq 0\}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left\{ 2x \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2x \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}|x|} \right) - \frac{x}{\sqrt{2}|x|} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}|x|} \right) \right\}$$



SOLUCIÓN

$$S : \{(x, y) / y = x, x \geq 0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2x \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}|x|} \right) - \frac{x}{\sqrt{2}|x|} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}|x|} \right) \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2x \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \right\} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \right\}$$



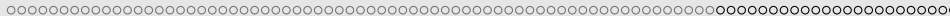


SOLUCIÓN

$$S : \{(x, y) / y = x, x \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2x \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \right\} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \right\} \\ 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \right\} \end{aligned}$$





SOLUCIÓN

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \right\}$$

Este límite no existe



SOLUCIÓN

$$S : \{(x, y) / y = x, x \geq 0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ 2x \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} \right) \right\} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} \right) \right\}$$

0 – No existe



SOLUCIÓN

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} D_1 f(x, y)$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left\{ 2x \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right\}$$

Este límite no existe

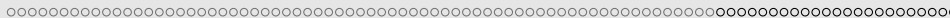


SOLUCIÓN

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} 2x \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$D_1f(x, y)$ No es continua en $(0, 0)$





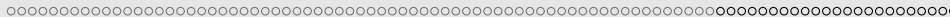
SOLUCIÓN

Siguiendo el procedimiento anterior se puede demostrar que

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} 2y \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$D_2f(x, y)$ No es continua en $(0, 0)$



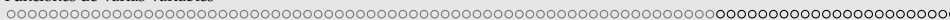


SOLUCIÓN

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- $D_1f(x, y)$ y $D_2f(x, y)$ No son continuas en $(0, 0)$.





CONCLUSIONES

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- ▶ $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$
- ▶ $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$
- ▶ $D_1f(x, y)$ y $D_2f(x, y)$ No son continuas en $(0, 0)$.



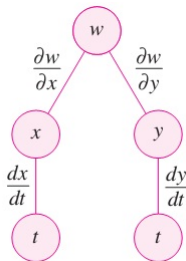


REGLA DE LA CADENA

Teorema

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función derivable de x e y . Si $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t , entonces w es una función diferenciable de t , y

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

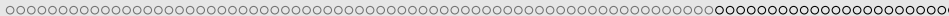




Ejemplo

Sea $w = x^2y - y^2$, donde $x = \sin t$; $y = e^t$. Hallar $\frac{\partial w}{\partial t}$.





Ejemplo

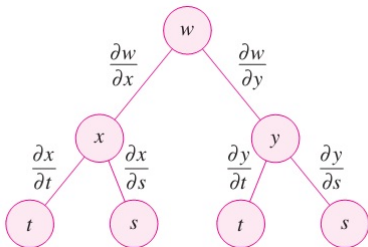
Al calentar un cilindro circular recto sólido, su radio r y altura h aumentan; por lo tanto, también lo hace el área S de su superficie. Suponga que en el instante en que $r = 10$ centímetros y $h = 100$ centímetros, r está creciendo a razón de 0,2 centímetros por hora y h aumenta a 0,5 centímetros por hora. ¿Qué tan rápido crece S en ese instante?

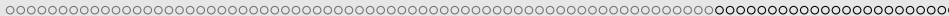


Teorema

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x e y . Si $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ son tales que las derivadas parciales de $\partial x/\partial s$, $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial s$ y $\partial y/\partial t$, existen, entonces $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ existen y están dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$





Ejemplo

Sea $w = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-y}{yz}\right)$. Demostrar que:

$$x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



DERIVACIÓN PARCIAL IMPLÍCITA

Teorema

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x , entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0$$

Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x e y , entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

$$F_z(x, y, z) \neq 0$$



DEMOSTRACIÓN

$$F(x, y, z) = 0, \quad z = f(x, y)$$

Si hacemos $w = F(x, y, z)$, y aplicamos la regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$





DEMOSTRACIÓN

$$w = F(x, y, z = 0), \quad z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$



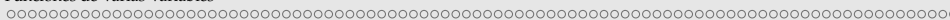
DEMOSTRACIÓN

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$0 = F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$





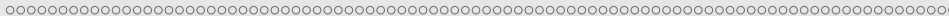
DEMOSTRACIÓN

$$w = F(x, y, z = 0), \quad z = f(x, y)$$

$$0 = F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$





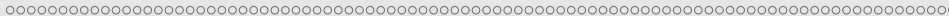
Ejemplo

Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$

Ejemplo

Hallar $\partial z/\partial x$, $y \partial z/\partial y$, si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

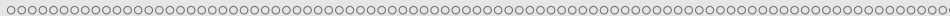




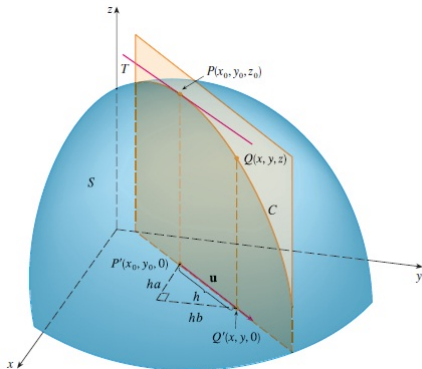
Ejercicio

Hallar $\partial z/\partial x$, y $\partial z/\partial y$, si $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$





DERIVADA DIRECCIONAL





DERIVADA DIRECCIONAL

Definición

La derivada direccional de $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}=(a, b)$ se define como

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

siempre que este límite exista.



Ejemplo

Dada $f(x, y) = x^2y - 4y^3$, calcular $D_{\mathbf{u}}f(2, 1)$ en las direcciones de:

1. $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$
2. \mathbf{u} en la dirección de $(2, 1)$ a $(4, 0)$.



Teorema

Si f es una función diferenciable de x e y , entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector $\mathbf{u} = (a, b)$ y

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Ejemplo

Encuentre la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y \mathbf{u} es el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \pi/6$. ¿Cuál es $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$

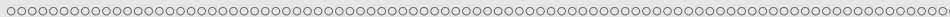


DERIVADA DIRECCIONAL Y PARCIAL

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} = (1, 0); \quad \theta = 0$$

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = D_1f(x, y)$$





DERIVADA DIRECCIONAL Y PARCIAL

$$\mathbf{u} = \mathbf{j} = (0, 1); \quad \theta = \pi/2$$

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = D_2f(x, y)$$



Definición

El gradiente de $f(x, y)$ es la función vectorial

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$\nabla f(x, y) = \text{grad } f(x, y)$$

supuestos que las dos derivadas parciales existen

Ejemplo

Hallar el gradiente de $f(x, y) = y \ln x + xy^2$ en el punto $(1, 2)$



Definición

Sea $f(x, y)$ una función diferenciable y u un vector unitario, Entonces

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u$$

Ejemplo

Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$$

en $(-\frac{3}{4}, 0)$, en la dirección de $P(-\frac{3}{4}, 0)$ a $Q(0, 1)$



Ejemplo

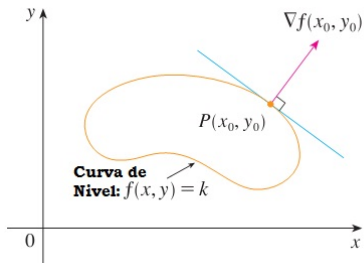
$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demostrar que f tiene derivada direccional en $(0, 0)$ pero no es diferenciable en ese punto.



Teorema

El Gradiente es normal a las curvas de nivel de $z = f(x, y)$.



APLICACIONES DE LA GRADIENTE

Teorema

Sea f diferenciable en el punto (x, y)

1. Si $\nabla f(x, y) = 0$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ para todo \mathbf{u} .
2. La dirección de máximo incremento de f está dada por $\nabla f(x, y)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$.
3. La dirección de mínimo incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es $-\|\nabla f(x, y)\|$.



EJEMPLO

Ejemplo

Una partícula está situada en el punto $P(-2, 1)$ de una placa metálica cuya temperatura viene dada por

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

donde x e y se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de $(2, -3)$ aumenta más rápido la temperatura?, ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento?



Ejemplo

Un rastreador térmico se encuentra en el punto $(2, -3)$ sobre una placa metálica cuya temperatura en (x, y) es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

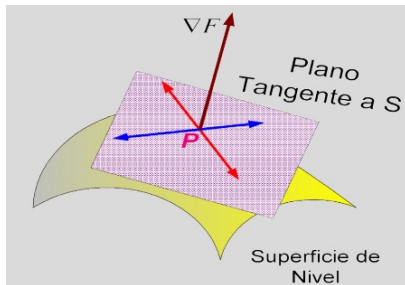
Hallar la trayectoria del rastreador, si éste se mueve continuamente en dirección de máximo incremento de temperatura.



PLANOS TANGENTES

Definición

Supongamos que $F(x, y, z) = k$ determina una superficie S y que F es diferenciable en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de esta superficie, con $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Entonces el plano que pasa por P y es perpendicular a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es el **plano tangente** a la superficie S en P .



Teorema

Para la superficie $F(x, y, z) = k$, la ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

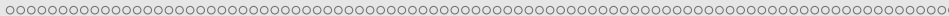
es decir

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

En particular, para la superficie $z = f(x, y)$, la ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$





Ejemplo

Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + 2z^2 = 23$ en $(1, 2, 3)$.

Ejemplo

Determinar la ecuación del plano tangente a $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 2)$



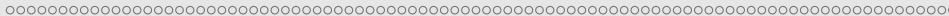
Definición

Supongamos que $F(x, y, z) = k$ determina una superficie S y que F es diferenciable en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de esta superficie, con $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Entonces la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama recta normal a S en P .

Definición (Ecuaciones Simétricas de la recta Normal a S en P)

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

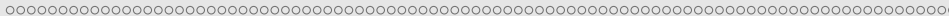




Ejemplo

Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie dada por $xyz = 12$ en el punto $(2, -2, -3)$.





Teorema

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel que pasa por (x_0, y_0, z_0)

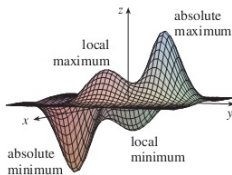


EXTREMO DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Teorema

Sea f una función continua de dos variables x e y definida en una región acotada cerrada D en el plano XY

1. Existe por lo menos un punto en D , en el que f toma un valor mínimo.
2. Existe por lo menos un punto en D , en el que f toma un valor máximo.



Definición

Sea f una función definida en una región D que contiene (x_0, y_0)

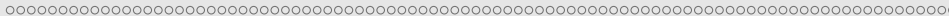
1. La función f tiene un **mínimo relativo** en (x_0, y_0) si existe una bola abierta B de centro (x_0, y_0) tal que

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta))$$

2. La función f tiene un **máximo relativo** en (x_0, y_0) si existe una bola abierta B de centro (x_0, y_0) tal que

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta))$$





Definición (Puntos críticos)

Sea f definida en una región abierta D que contiene a (x_0, y_0) . El punto (x_0, y_0) es un punto crítico de f si en él se da alguna de estas circunstancias:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$
2. $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existen.



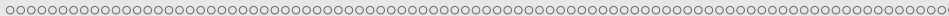


LOS EXTREMOS RELATIVOS SÓLO PUEDEN OCURRIR EN PUNTOS CRÍTICOS

Si f está definida en una región D y tiene en (x_0, y_0) un extremo relativo, entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f .

Si f está definida en una región abierta D y tiene en (x_0, y_0) un punto crítico de f , entonces (x_0, y_0) puede ser o no un extremo relativo de f .





Ejemplo

Hallar los extremos relativos de

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$$



Teorema (EL criterio de las segundas derivadas parciales)

Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene al punto (x_0, y_0) en el cual

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad y \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

Para buscar los extremos relativos de f , sea

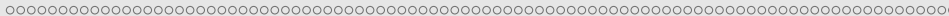
$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

Entonces



1. Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un valor máximo local.
2. Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un valor mínimo local.
3. Si $D < 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ no es un valor máximo extremo (punto de silla).
4. Si $D = 0$, el criterio no es concluyente.



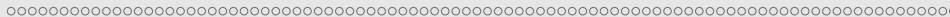


Ejemplo

Determinar los extremos, si existen, de la función F definida como

$$F(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$$

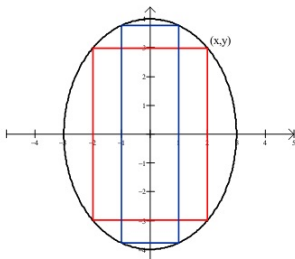


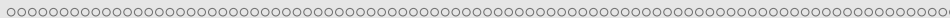


MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Deseamos hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse

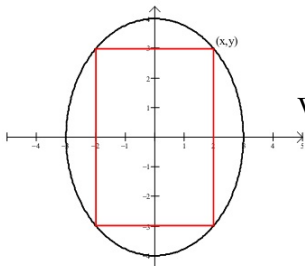
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$





MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

El rectángulo tiene lados $2x$ y $2y$



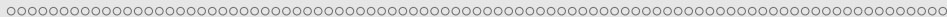
Función objetivo

$$f(x, y) = 4xy$$

Vinculo o ligadura

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$





MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Interpretamos la ecuación de ligadura

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

como una curva de nivel fija de

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2}$$





MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

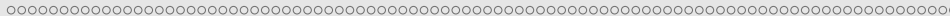
Las curvas de nivel de f

$$f(x, y) = 4xy = k$$

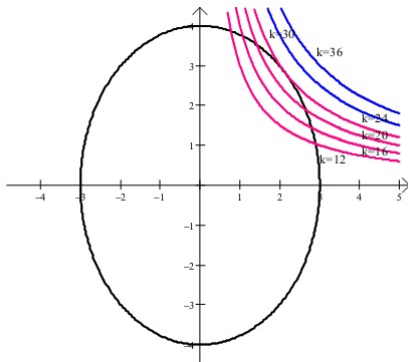
es una familia de hipérbolas.

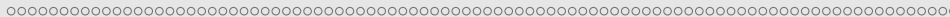
Las curvas de nivel de f en las que hay puntos que satisfacen la ligadura o el vínculo corresponden a las hipérbolas que cortan a la elipse.



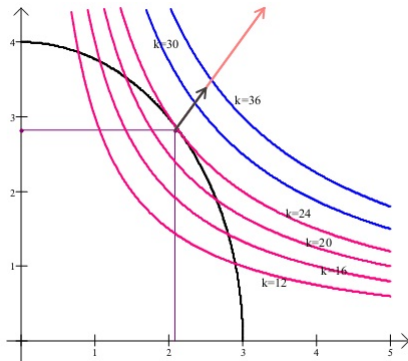


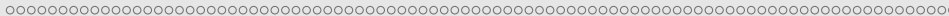
MULTIPLICADORES DE LAGRANGE





MULTIPLICADORES DE LAGRANGE





Teorema (Lagrange)

Sean f y g funciones con primeras derivadas parciales continuas, tales que f tiene un extremo en el punto (x_0, y_0) sobre la curva suave de ligadura $g(x, y) = c$.

Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ existe un número λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$



MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

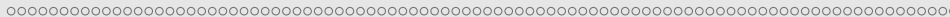
Sean f y g que satisfacen el teorema de Lagrange, tales que f tiene un extremo sujeto a la condición $g(x, y) = c$. Para hallar el mínimo o el máximo de f , basta proceder como sigue:

- ▶ Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) &= c\end{aligned}$$

- ▶ Evaluar f en cada uno de los puntos solución obtenidos en el paso anterior. El mayor de esos valores da el máximo de f sujeta a la ligadura y el menor da el mínimo de f sujeta a la ligadura.





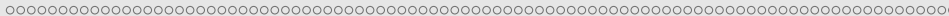
CÁLCULO DE LOS EXTREMOS ABSOLUTOS

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables definida y continua en una región cerrada y acotada D del plano XY entonces f alcanza su máximo y mínimo absoluto

- ▶ En los puntos fronteras de D .
- ▶ En los puntos críticos de f en el interior de D .

Comparando los valores se determinan el valor máximo absoluto y el mínimo absoluto de f en D .

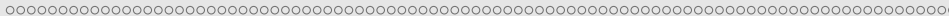




Ejemplo

¿Cuál es la máxima área que puede tener un rectángulo si la longitud de su diagonal es 2?





Ejemplo

Hallar el mínimo valor de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$$

sujeta a:

$$2x - 3y - 4z - 49 = 0$$





OPTIMIZACIÓN CON UNA DESIGUALDAD COMO RESTRICCIÓN

Para hallar los valores extremos de la función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) \leq 0$. Seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallar los puntos críticos que satisfacen la restricción.
2. Hallar los valores extremos de la función frontera $g(x, y) = 0$.

Finalmente comparamos los resultados.





Ejemplo

La temperatura en los puntos (x, y) de una lámina metálica de forma elíptica limitada por $x^2 + 4y^2 \leq 24$, viene dada por $T(x, y) = x^2 + 2x + y^2$. Hallar la temperatura máxima y mínima.

