UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2012-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **20/07/2012**
DACIBAHCC

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE MEDIOS DE COMUNICACIÓN ELECTRÓNICA**

Problema 1

Un bloque se desplaza sobre una superficie plana por efecto de una fuerza cuya magnitud F(x) y el ángulo θ(x), que forma con la horizontal, varían en función de la posición x que va tomando el bloque. Debido a restricciones experimentales, solo ha sido posible registrar la siguiente información:

x (pies)	0.0	2.5	5.0	10.0	12.5	15.0	20.0	25.0	30.0
F(x)(libras)	0.0	6.0	9.0	13.0	13.5	14.0	10.5	12.0	5.0
θ(x)(radianes)	0.50	0.76	1.40	0.75	0.57	0.90	1.30	1.48	1.50

Aplicando integración numérica con el menor error posible

a) (**3 Pts.**) Calcular el trabajo (W) realizado por el bloque en su recorrido. Si se tiene que $W = \int_0^{30} F(x).\cos(\theta(x)).dx$ Trabaje con 4 lugares decimales.

b) (**2 Pts.**) Escriba comandos Matlab para graficar los datos del problema.

Problema 2

La posición de un vehículo de 2 toneladas sobre una pista recta, es registrada por un instrumento de medición por ondas de radio, entregando la siguiente información:

Tiempo (s)	1	5	8	9
Posición(m)	2	5	11	16

Haciendo uso de un spline cubico natural, calcule lo siguiente:

a) (**2 Ptos.**) Determine el spline indicando sus resultados parciales.

b) (**1 Pto.**) La posición a los 7 segundos.

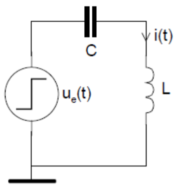
c) (**1 Pto.**) La velocidad del vehículo a los 8 segundos.

d) (**1 Pto.**) La fuerza que genera el motor para poder mover el vehículo en el instante 8 segundos, considerando que Fuerza=masa x aceleración.

Problema 3

a) (1 Pto.) Determine el sistema de EDOs correspondiente a la ecuación del circuito eléctrico descrito en la figura 1:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = \frac{1}{L}\left(\frac{du_e(t)}{dt} - \frac{1}{C}i(t)\right)$$



Datos:
C=1 µF
L= 10 mH.
u_e(t)=0V en t_0, después 1V.

Figura 1 Circuito Eléctrico

b) (3 Pts.) Determine los dos primeros valores de la función solución para la corriente de malla con un tamaño de paso h = 0.02 ms desde el momento t_0= 0 con el método de Euler. Con valores iniciales i(0)=0, di(0)/dt=1/L

c) **(1 Pto.)** Determine el algoritmo de Taylor de orden 2.

Problema 4

Representamos por u el potencial electroestático entre dos esferas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$, tales que el potencial de la esfera interior se mantiene constante a V_1 voltios y el potencial de la esfera exterior a 0 voltios. El potencial en la región entre las dos esferas está gobernado por la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \qquad R_1 \leq r \leq R_2$$

Suponiendo que $R_1 = 2\ mm,\quad R_2 = 4\ mm$ y $V_1 = 110$ voltios:

a) (**2.5 Pts.**) Aproximar el valor del potencial u para $r = 3$ usando el método del disparo lineal. Considere h=1, $\epsilon = 10^{-3}$

b) (**1 Pto.**) Si la solución exacta es $u(r) = \frac{V_1 R_1}{r}\left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right)$, determinar el error exacto cometido en la aproximación de a).

c) (**1.5 Pto.**) Implementar una función en Matlab que dadas las pendientes iniciales s0 y s1 con soluciones aproximadas uN0, uN1. Calcule la pendiente mejorada δ y el valor de uNδ

```
function Y=dispalin(f,a,b,alpha,beta,s0,s1,uN0,uN1,h)
% f: nombre del archivo .m donde se define el sistema
% a, b: extremos del intervalo
% s0, s1: pendientes iniciales
% alpha, beta: valores extremos
% h:  tamaño de paso
```

Los Profesores

Solución 1

a) Según la tabla calculamos $F(x).\cos(x)$

x (pies)	0.0	2.5	5.0	10.0	12.5	15.0	20.0	25.0	30.0
$F(x).\cos(x)$	0.0	5.9995	8.9973	12.9989	13.4993	13.9983	10.4973	11.9960	4.9983

Ahora aplicamos integración por partes según lo siguiente:

$$W = \int_0^{30} F(x).\cos(x)\,.dx = \int_0^{5} F(x)dx + \int_5^{10} F(x)dx + \int_{10}^{15} F(x)dx + \int_{15}^{30} F(x)dx$$

Estos cuatro integrandos se evalúan con Simpson (h = 2.5), Trapecios (h = 5), Simpson (h=2.5) y Simpson (h = 5), respectivamente

$$\int_0^{5} F(x)dx = \frac{2.5}{3}[0 + 4(5.9995) + 8.9973] = 27.4961$$

$$\int_5^{10} F(x)dx = \frac{5}{2}[8.9973 + 12.9989] = 54.9905$$

$$\int_{10}^{15} F(x)dx = \frac{2.5}{3}[12.9989 + 4(13.4993) + 13.9993] = 67.4962$$

$$\int_{15}^{30} F(x)dx = \frac{5}{3}[13.9993 + 4(10.4973) + 2(11.9960) + 4.9983] = 141.6247$$

Finalmente sumando tenemos: $W = 261.6075$ Respuesta
Comandos de Matlab

```
>> x=[0.0 2.5 5.0 10.0 12.5 15.0 20.0 25.0 30.0];
>>fx=[0.0 6.0 9.0 13.0 13.5 14.0 10.5 12.0 5.0];
>>tetha=[0.50 0.76 1.40 0.75 0.57 0.90 1.30 1.48 1.50];
>>fxcos=fx.*cos(tetha);
>>plot(x,fx,x,fxcos), gridon,xlabel('Eje X'),ylabel('Eje Y')
```

Solución 2

Preparando la tabla de valores

i	x	y	hi	y[xi,xi+1]
0	1	2	4	0.75
1	5	5	3	2
2	8	11	1	5
3	9	16		

Ordenando para resolver el sistema de ecuaciones para hallar las M
Considerando spline cubico natural M0 y M3 =0

H

14	3
3	8

M

M1
M2

Y

7.5
18

Resolviendo

M0	0
M1	0.05825
M2	2.22816
M3	0

a)

PSi=ai(t-ti)^3+bi(t-ti)^2+ci(t-ti)+di

	a	b	c	d
p0	0.00242718	0	0.71116505	2
p1	0.12055016	0.02912621	0.8276699	5
p2	-0.3713592	1.11407767	4.25728155	11

b) P1(7)= 7.7362
c) Derivando el polinomio P1 y evaluando en 8
   P1'(8)= 4.2572 m/s
d) P1''(8)=M2= 2.2281m/s^2= aceleración
   Fuerza=4456 N

Solución 3

La ecuación integral se transforma mediante la derivación de una ecuación diferencial de primer orden y de forma explícita para i (t) se escribe:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = \frac{1}{L}\left(\frac{du_e(t)}{dt} - \frac{1}{C} i(t)\right)$$

a)

$z_1 = i(t)$ $\quad$ $z_1' = i'(t) = z2$ $\quad$ $z_2' = i''(t)$

$z_1' = z_2$

$$z_2' = \frac{1}{L}\left(\frac{du_e(t)}{dt} - \frac{z1}{C}\right)$$

Hacer $\frac{du_e}{dt} = 0$

Datos:

L =	0.01		$i(t_0)$ =	0
C =	1.00E-06		$i'(t_0)$ =	1.00E+02
U_E =	1		T =	1E-08
t_0 =	0			
h =	2.00E-05			

b)Algoritmo de Euler:

$$Z^{(i+1)} = Z^{(i)} + hF(t, Z^{(i)})$$

i	t_i	$z1=i(t_i)$	$z2=i'(t_i)$
0	0	0	100
1	0.00002	2.00E-03	100
2	0.00004	4.00E-03	96

c)

$$Z^{(i+1)} = Z^{(i)} + hF\left(t, Z^{(i)}\right) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial F}{\partial z}F\left(t, Z^{(i)}\right) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -\frac{1}{LC}z_1 \end{bmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -\frac{1}{LC}z_1 \end{bmatrix}$$

Solución 4

(a)

$$u'' = -\frac{2}{r}u', \quad r \in [2,4].$$

$$u(2) = 110; \quad u'(2) = 0$$

Y =

```
   2.0000  110.0000  -55.0000
   3.0000   69.9383  -28.2922
   4.0000   49.3304  -14.5536
```

uN0 = 49.3304

s1 = -79.6652

Y =

```
   2.0000  110.0000  -79.6652
   3.0000   51.9723  -40.9800
   4.0000   22.1226  -21.0803
```

uN1 = 22.1226

s2 = -99.7204

Y =

```
   2.0000  110.0000  -99.7204
   3.0000   37.3641  -51.2965
   4.0000    0.0000  -26.3871
```

(b)

La solución aproximada para r=3:

$$u(3) \approx 37.3641$$

Valor Exacto=36.6667

Error= 0.6974

(c)

```
function Y=dispalin2(f,a,b,alpha,beta,s0,s1,uN0,uN1,h)
%f:nombre del archivo .m donde se define el sistema
%a,b:extremos del intervalo
%s0,s1: pendientes iniciales
%alpha,beta: valores extremos
%h tamaño de paso
s=s0+(s1-s0)*(beta-uN0)/(uN1-uN0);
    Y=ode45(f,[a:h:b],[alpha s]);
```