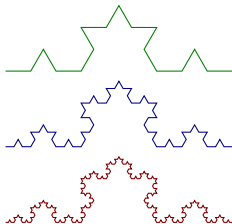


Derivación Numérica

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ingeniería Industrial



Métodos Computacionales

Agenda



Derivación
Numérica

Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

Introducción

Derivadas de
primer orden

Derivadas de
orden superior

Derivadas de primer orden

Derivadas de orden superior



Derivación Numérica

Mg. Hermes
Pantoja C.

La derivación o diferenciación numérica consiste en evaluar derivadas de una función usando únicamente los valores que toma la función en una serie de puntos. La técnica de aproximar las derivadas por diferencias tiene muchas aplicaciones, en particular a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales.

3

Introducción

Derivadas de
primer orden

Derivadas de
orden superior

Derivadas de primer orden

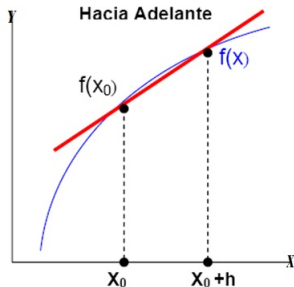


Si recordamos la definición de derivada de una función $f(x)$ en un punto x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tendremos que una primera aproximación al valor de $f'(x)$ lo tendremos con la expresión:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Derivación
Numérica

Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

4 Derivadas de
primer orden

Derivadas de
orden superior



De cara a analizar el error de la aproximación, supongamos que $f(x)$ es derivable dos veces en un entorno del punto x y aplicando la fórmula de Taylor a $f(x+h)$ en x :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

Para algún $\xi \in \langle x, x+h \rangle$. Despejando tendremos:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h$$

Utilizando Diferencias Divididas



Derivación
Numérica

Mg. Hermes
Pantoja C.

Dado los puntos $(x_0, f(x_0)); (x_0 + h, f(x_0 + h))$ se tiene el polinomio interpolante de primer grado

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0 + h](x - x_0)$$

Luego, derivando

$$p'(x) = f[x_0, x_0 + h] = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} \approx f'(x)$$

Entonces:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Introducción

6 Derivadas de
primer orden

Derivadas de
orden superior



Derivación de Primer Orden Central

Es posible, sin embargo, mejorar la precisión de la siguiente manera: Consideremos los polinomios de Taylor de las funciones $f(x + h)$ y $f(x - h)$, suponiendo que la función es al menos tres veces derivable:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3$$
$$f(x - h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$$

Si restamos ambas expresiones y despejamos tendremos:

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

Se denomina aproximación central con un error proporcional a h^2 .



Derivación Numérica

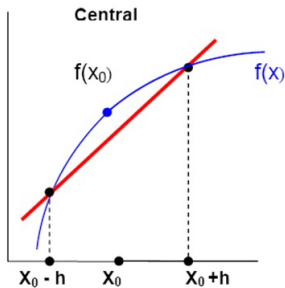
Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

8

Derivadas de primer orden

Derivadas de orden superior



$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$



Utilizando Diferencias Divididas

Dado los puntos

$(x_0 - h, f(x_0 - h)); (x_0, f(x_0)); (x_0 + h, f(x_0 + h))$ se tiene el polinomio interpolante de primer grado

$$p(x) = f(x_0 - h) + f[x_0 - h, x_0](x - (x_0 - h)) + f[x_0 - h, x_0, x_0 + h](x - (x_0 - h))(x - x_0)$$

Derivando:

$$p'(x) = f[x_0 - h, x_0] + f[x_0 - h, x_0, x_0 + h] \cdot (2x - (2x_0 - h))$$
$$p'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{f[x_0, x_0 + h] - f[x_0 - h, x_0]}{2h} \cdot h$$

Por lo tanto

$$p'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \approx f'(x_0)$$

Derivación
Numérica

Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

9 Derivadas de
primer orden

Derivadas de
orden superior



Ejercicio

Deduzca la siguiente fórmula de diferenciación a partir de la fórmula del polinomio interpolante de Newton basado en diferencias divididas

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2h) - 6f(x_0 - h) + 3f(x_0) + 2f(x_0 + h)}{6h}$$

Derivadas de segundo orden



Derivación
Numérica

Mg. Hermes
Pantoja C.

De forma análoga se obtiene una aproximación para la segunda derivada

Aproximación hacia adelante:

$$f''(x) \approx \frac{f(x_0) - 2f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{h^2}$$

Aproximación central

$$f''(x) \approx \frac{f(x - h) - 2f(x) + f(x + h)}{h^2}$$

Introducción

Derivadas de
primer orden

11 Derivadas de
orden superior



Fórmulas para calcular derivadas segundas

$$f''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + \mathcal{O}(h^4)$$

Derivadas de tercer y cuarto orden



Derivación
Numérica

Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

Derivadas de
primer orden

13 Derivadas de
orden superior

Fórmulas para calcular derivadas terceras

$$f^{(iii)}(x_0) = \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{h^3} + \mathcal{O}(h)$$

$$f^{(iii)}(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$f^{(iii)}(x_0) = \frac{f_{-3} - 8f_{-2} + 13f_{-1} - 13f_1 + 8f_2 - f_3}{8h^3} + \mathcal{O}(h^4)$$

Fórmulas para calcular derivadas cuartas

$$f^{(iv)}(x_0) = \frac{f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0}{h^4} + \mathcal{O}(h)$$

$$f^{(iv)}(x_0) = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$f^{(iv)}(x_0) = \frac{-f_{-3} + 12f_{-2} - 39f_{-1} + 56f_0 - 39f_1 + 12f_2 - f_3}{6h^4} + \mathcal{O}(h^4)$$