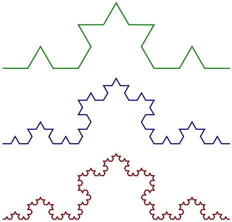
Derivación Numérica

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingenieria Mecánica



Métodos Numérico

Agenda

Introducción

Derivadas de primer orden

Derivadas de orden superior

La derivación o diferenciación numérica consiste en evaluar derivadas de una función usando únicamente los valores que toma la función en una serie de puntos. La técnica de aproximar las derivadas por diferencias tiene muchas aplicaciones, en particular a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales.

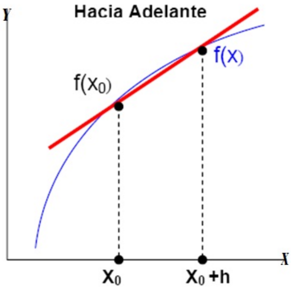
Derivadas de primer orden

Si recordamos la definición de derivada de una función $f(x)$ en un punto x

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tendremos que una primera aproximación al valor de $f'(x)$ lo tendremos con la expresión:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



De cara a analizar el error de la aproximación, supongamos que $f(x)$ es derivable dos veces en un entorno del punto x y aplicando la fórmula de Taylor a $f(x+h)$ en x:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

Para algún $\xi \in \langle x, x+h \rangle$. Despejando tendremos:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h$$

Utilizando Diferencias Divididas

Dado los puntos $(x_0, f(x_0)); (x_0 + h, f(x_0 + h))$ se tiene el polinomio interpolante de primer grado

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0 + h](x - x_0)$$

Luego, derivando

$$p'(x) = f[x_0, x_0 + h] = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} \approx f'(x)$$

Entonces:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivación de Primer Orden Central

Es posible, sin embargo, mejorar la precisión de la siguiente manera: Consideremos los polinomios de Taylor de las funciones $f(x+h)$ y $f(x-h)$, suponiendo que la función es al menos tres veces derivable:

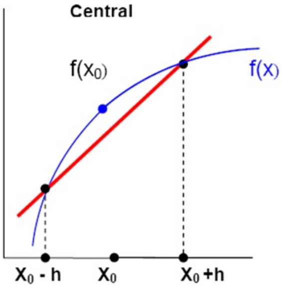
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3$$

Si restamos ambas expresiones y despejamos tendremos:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

Se denomina aproximación central con un error proporcional a h^2.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$



Utilizando Diferencias Divididas

Dado los puntos
$(x_0-h, f(x_0-h)); (x_0, f(x_0)); (x_0+h, f(x_0+h))$ se tiene el polinomio interpolante de primer grado

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0-h)+f[x_0-h,x_0](x-(x_0-h))+ \\ &\quad +f[x_0-h,x_0,x_0+h](x-(x_0-h))(x-x_0) \end{aligned}$$

Derivando:

$$\begin{aligned} p'(x) &= f[x_0-h,x_0]+f[x_0-h,x_0,x_0+h].(2x-(2x_0-h)x) \\ p'(x_0) &= \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}+\frac{f[x_0,x_0+h]-f[x_0-h,x_0]}{2h}.h \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$p'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\approx f'(x_0)$$

Ejercicio

Deduzca la siguiente fórmula de diferenciación a partir de la fórmula del polinomio interpolante de Newton basado en diferencias divididas

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2h) - 6f(x_0 - h) + 3f(x_0) + 2f(x_0 + h)}{6h}$$

Derivadas de segundo orden

De forma análoga se obtiene una aproximación para la segunda derivada

Aproximación hacia adelante:

$$f''(x) \approx \frac{f(x_0) - 2f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{h^2}$$

Aproximación central

$$f''(x) \approx \frac{f(x - h) - 2f(x) + f(x + h)}{h^2}$$

Fórmulas para calcular derivadas segundas

$$f''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + \mathcal{O}(h)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + \mathcal{O}(h^4)$$

Derivadas de tercer y cuarto orden

Fórmulas para calcular derivadas terceras

$$f^{(iii)}(x_0) = \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{h^3} + \mathcal{O}(h)$$

$$f^{(iii)}(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$f^{(iii)}(x_0) = \frac{f_{-3} - 8f_{-2} + 13f_{-1} - 13f_1 + 8f_2 - f_3}{8h^3} + \mathcal{O}(h^4)$$

Fórmulas para calcular derivadas cuartas

$$f^{(iv)}(x_0) = \frac{f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0}{h^4} + \mathcal{O}(h)$$

$$f^{(iv)}(x_0) = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$f^{(iv)}(x_0) = \frac{-f_{-3} + 12f_{-2} - 39f_{-1} + 56f_0 - 39f_{-1} + 12f_{-2} - f_{-3}}{6h^4} + \mathcal{O}(h^4)$$