Conicas

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Industrial
Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Matematica I

Contenido

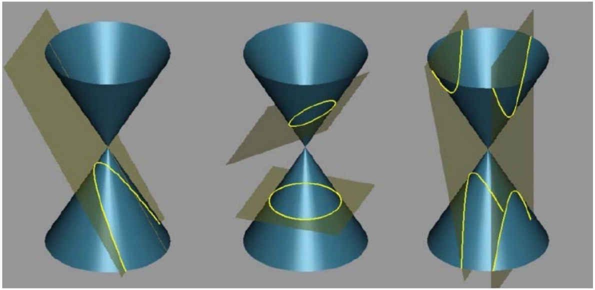
Objetivos

Se persigue que el estudiante:

- Identifique, grafique y determine los elementos de una cónica conociendo su ecuación general
- Dado elementos de una cónica encuentre su ecuación.
- Resuelva problemas de aplicación empleando teoria de cónicas.

Introducción

Las cónicas o también llamadas secciones cónicas se presentan cuando un doble cono se interseca con planos.



Estamos interados en ecuaciones de una cónica de la forma

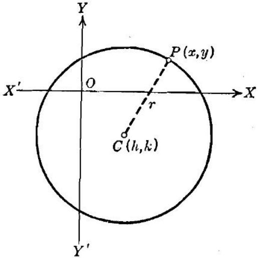
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0$$

Con $A \neq 0$ ó $B \neq 0$ ó ambos, y $E = 0$

Definición

La circunferencia es el lugar geométrico del plano descrito por un punto que se mueve a una distancia constante de un punto fijo. El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia constante se llama radio.

La circunferencia cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo radio es la constante r, tiene por ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



Ejemplo

Ejemplo

Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2,-4)$ y que es tangente al eje Y.

Ejemplo

Ejemplo

Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, -4)$ *y que es tangente al eje* Y.

Ejemplo

Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(0, -2)$ *y es tangente a la recta* $5x - 12y + 2 = 0$.

Ejemplo

Ejemplo

Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2,-4)$ *y que es tangente al eje* Y.

Ejemplo

Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(0,-2)$ *y es tangente a la recta* $5x-12y+2=0$.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7,-5)$ *y cuyo centro es el punto de la intersección de las rectas* $7x-9y-10=0$; $2x-5y+2=0$.

Forma general de la ecuación de la circunferencia

Desarrollando los cuadrados en la ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

tenemos

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

y agrupando todos los términos en el primer miembro:

$$x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+(h^2+k^2-r^2)=0$$

Forma general de la ecuación de la circunferencia

$D = -2h$
$E = -2k$
$F = h^2 + k^2 - r^2$
Tenemos:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Observación:Cuando la ecuación de una circunferencia está expresada en su forma general, los dos términos de segundo grado tienen coeficientes iguales.

Forma general de la ecuación de la circunferencia

Teorema

La ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una circunferencia solamente si $D^2 + E^2 - 4F > 0$
Las coordenadas del centro son, entonces, $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$
y el radio $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

Parábola

Definición

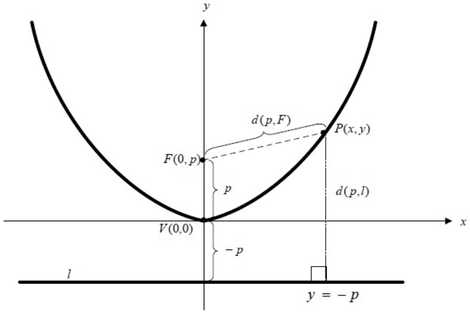
Sea l una recta y sea F un punto. La parábola se define como el conjunto de puntos $P(x, y)$ tal que su distancia al punto F es igual a su distancia a la recta l. Es decir:

$$Parábola = \{P(x, y) \ / \ d(P, F) = d(p, l)\}$$

Al punto F se le denomina **foco de la parábola** y a la recta l se denomina **directriz de la parábola**.

Ecuación Canónica

Supongamos que F tiene coordenadas $(0, p)$ y la recta l tiene ecuación $y = -p$ con $p > 0$. Observe la gráfica:

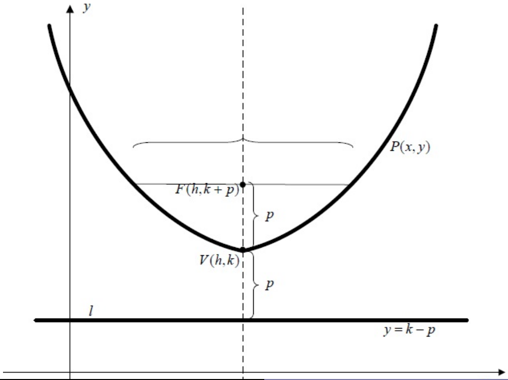


Al punto V se le denomina **vértice de la parábola**, en este caso tiene coordenadas $(0, 0)$. La recta perpendicular a la directriz, que contiene al vértice y al foco, se le denomina **Eje Focal**.

Eje Focal Paralelo al eje Y

Supongamos ahora que el vértice no es el origen, que tenemos $V(h,k)$, entonces su ecuación será:

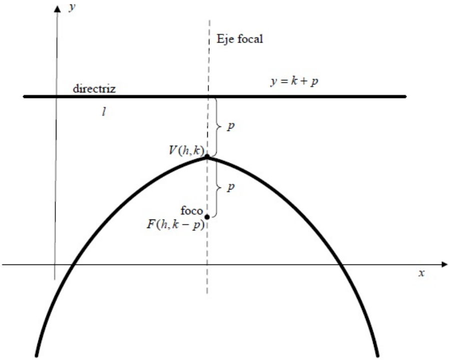
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$



Para otros casos, tenemos:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

Una parábola con **eje focal vertical**, pero **cóncava hacia abajo**.

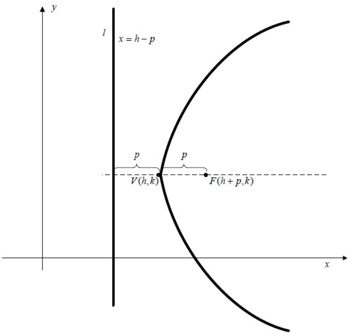


Eje Focal paralelo al eje X

Si la parábola tiene ecuación

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

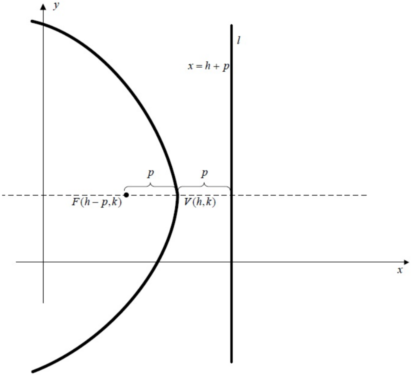
Su eje focal será horizontal y además será cóncava hacia la derecha:



Si la parábola tiene ecuación

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

Su eje focal será horizontal, pero ahora será cóncava hacia la izquierda.



La ecuación general de esta cónica será de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$$

con $A = 0$ ó $B = 0$ pero no ambos. Es decir tendremos ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cx + Dy + F = 0$$

o de la forma

$$By^2 + Cx + Dy + F = 0$$

según sea la dirección del eje focal.

Ejemplos

Ejemplo

Graficar la parábola que tiene por ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$. *Indique las coordenadas del vértice, coordenadas del foco, ecuación de la recta directriz.*

Ejemplos

Ejemplo

Graficar la parábola que tiene por ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$*. Indique las coordenadas del vértice, coordenadas del foco, ecuación de la recta directriz.*

Ejemplo

Hallar la ecuación general de la parábola que tiene foco el punto de coordenadas $(-3, -2)$ *y recta directriz con ecuación* $x = 1$*.*

Ejemplo

Un puente colgante de 120m *de longitud tiene trayectoria parabólica sostenida por torres de igual altura si la directriz se encuentra en la superficie terrestre y el punto más bajo de cada cable está a* 15m *de altura de dicha superficie, hallar la altura de las torres.*

Ejemplo

Un puente colgante de $120m$ *de longitud tiene trayectoria parabólica sostenida por torres de igual altura si la directriz se encuentra en la superficie terrestre y el punto más bajo de cada cable está a* $15m$ *de altura de dicha superficie, hallar la altura de las torres.*

Ejemplo

Hallar la ecuación de la parábola que tiene eje focal vertical y contiene los puntos $(-1,5)$, $(3,1)$ *y* $(7,5)$.

Elipse

Definición

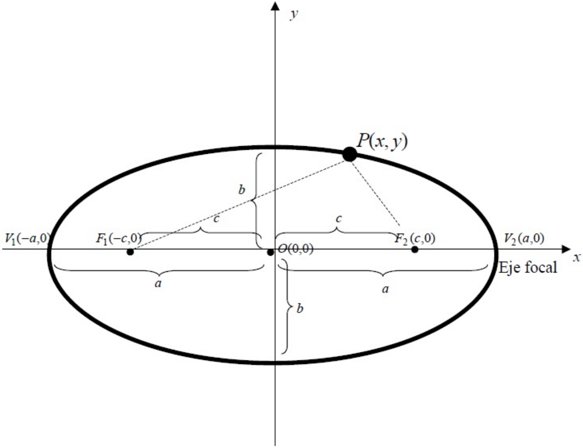
Sea F_1 y F_2 dos puntos del plano y sea $'a'$ una constante positiva. La Elipse se define como el conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que la suma de su distancia a F_1 con su distancia a F_2 es igual a $2a$. Es decir

$$Elipse = \{P(x, y) \ / \ d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

A F_1 y F_2 se les denomina **focos de la elipse** y a representa la medida del **semieje mayor** de la elipse.

Ecuación Canónica

Sea $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, observe el gráfico



Ecuación Canónica de la Elipse

Ecuación canónica de la elipse con centro $O(0,0)$ y eje focal horizontal.

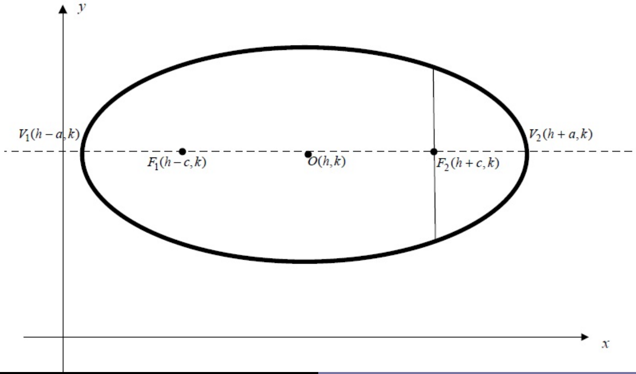
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

b representa la longitud del semieje menor, aquí el lado recto tiene dimensión $\dfrac{2b^2}{a}$

Eje Focal paralelo al eje X

Supongamos que el vértice es el punto $V(h, k)$, y que el eje focal sea horizontal entonces su ecuación sería:

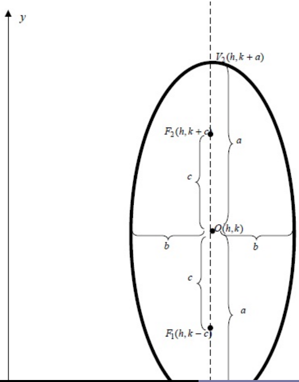
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Eje Focal paralelo al eje Y

Supongamos que el vértice es el punto $V(h, k)$, y que el eje focal sea vertical entonces su ecuación sería:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Ejemplos

Ejemplo

Graficar la Elipse que tiene por ecuación $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$. *Indique todos sus elementos.*

Ejemplos

Ejemplo

Graficar la Elipse que tiene por ecuación $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$. *Indique todos sus elementos.*

Ejemplo

Hallar la ecuación general de la Elipse cuyo eje mayor mide 20 *unidades y los focos son los puntos de coordenadas* $(0, 5\sqrt{3})$ *y* $(0, -5\sqrt{3})$

Ejemplo

Una pista de carros tiene forma elipse, el eje mayor mide 10 *km, y el eje menor* 6 *Km. Determine la distancia a que se encuentra un carro del centro de la pista en el momento en que pasa a la altura de uno de los focos.*

Hipérbola

Definición

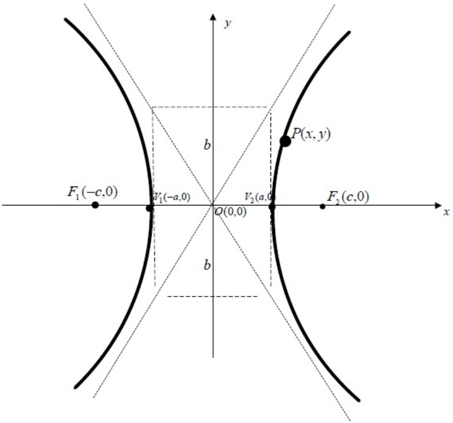
Sean F_1 y F_2 dos puntos del plano y sea $'a'$ una constante positiva. La Hipérbola se define como el conjunto de puntos $P(x, y)$ del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de su distancia a F_1 con su distancia a F_2 es igual a $2a$. Es decir:

$$Hipérbola = \{P(x, y)\ /\ |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

A F_1 y F_2 se les denomina **focos de la hipérbola**.

Ecuación Canónica

Sean $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, observe el gráfico



Ecuación Canónica de la Hipérbola

Ecuación canónica de la Hipérbola con centro $O(0,0)$ y eje focal horizontal.

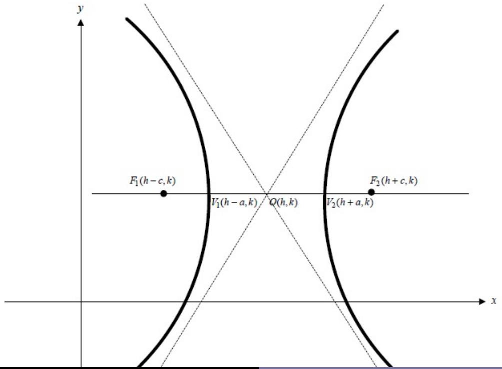
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b representa la longitud del segmento llamado **semieje conjugado**.

Eje Focal paralelo al eje X

Supongamos que el vértice es el punto $V(h,k)$, y que el eje focal sea horizontal entonces su ecuación sería:

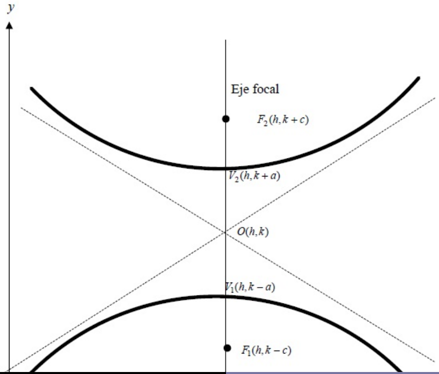
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Eje Focal paralelo al eje Y

Supongamos que el vértice es el punto $V(h,k)$, y que el eje focal sea vertical entonces su ecuación sería:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



Ejemplo

Ejemplo

Graficar la hipérbola que tiene por ecuación $x^2 - 3y^2 + 2x + 6y - 1 = 0$. *Indique las coordenadas de los vértices, coordenadas de los focos y las ecuaciones de las asintotas.*

Ejemplo

Ejemplo

Graficar la hipérbola que tiene por ecuación $x^2 - 3y^2 + 2x + 6y - 1 = 0$. *Indique las coordenadas de los vértices, coordenadas de los focos y las ecuaciones de las asintotas.*

Ejemplo

Hallar la ecuación general de la cónica que tiene por focos los puntos $(1,3)$ *y* $(7,3)$; *y por vértices los puntos* $(2,3)$ *y* $(6,3)$.