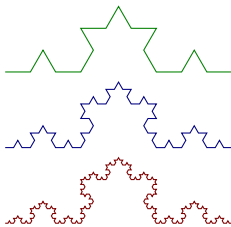


# Integrales Dobles

Hermes Pantoja Carhuavilca

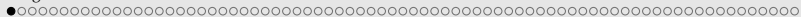
Facultad de Ingeniería Mecánica  
Universidad Nacional de Ingeniería



Calculo Vectorial



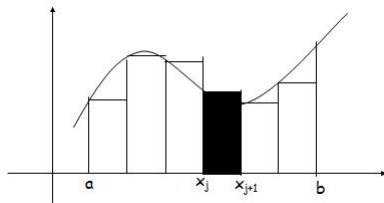




# INTRODUCCIÓN

En el curso de calculo integral se planteó el problema de hallar el área comprendida entre la gráfica de una función positiva  $y = f(x)$ , el eje  $OX$  y las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ . Dicha área se

representaba como  $\int_a^b f(x)dx$



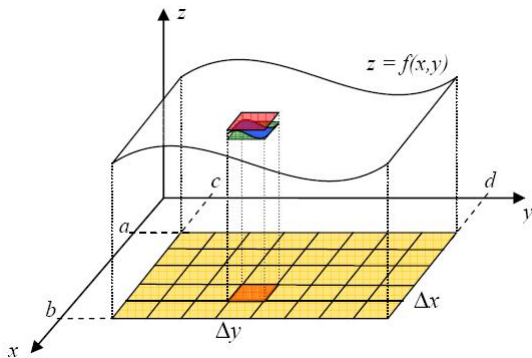
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$





Dada una función  $z = f(x, y)$  en  $D \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $z > 0$ ,  
 $\forall (x, y) \in D$ ; queremos encontrar el volumen del sólido limitado  
 por  $f$  arriba de  $D$ , donde  $D$  es una región rectangular definida:

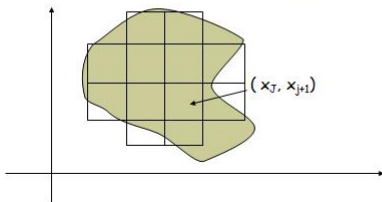
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

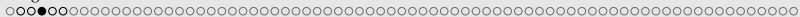


## LA INTEGRAL DOBLE

Sea  $f$ , continua en una región  $R$  del plano  $XY$ . Usando líneas paralelas a los ejes para aproximar  $R$  por medio de  $n$  rectángulos de área  $\Delta A$ . Sea  $(x_j, y_j)$  un punto del  $j$ -ésimo rectángulo, entonces la integral doble de  $f$  sobre  $R$  es:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) \Delta A$$

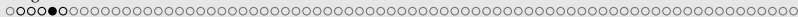




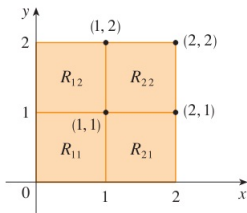
## Ejemplo

*Estime el volumen del sólido que se encuentra arriba del cuadrado  $R = [0, 2] \times [0, 2]$  y abajo del paraboloides elíptico  $z = 16 - x^2 - 2y^2$ . Divida  $R$  en cuatro cuadrados iguales y escoja el punto de muestra como la esquina superior derecha de cada cuadrado  $R_{ij}$ . Trace el sólido y las cajas rectangulares de aproximación.*

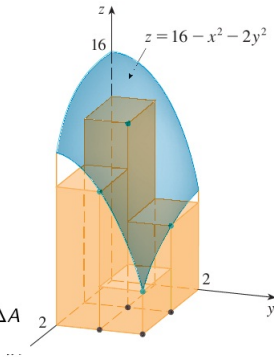


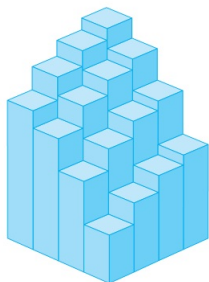
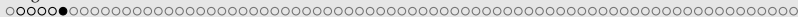


# SOLUCIÓN

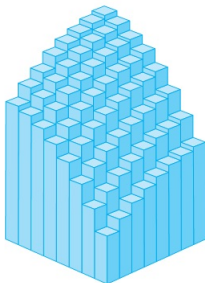


$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i, x_j) \Delta A \\
 &= f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A \\
 &= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34
 \end{aligned}$$

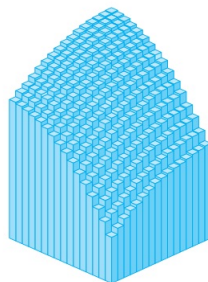




(a)  $m = n = 4, V \approx 41.5$



(b)  $m = n = 8, V \approx 44.875$



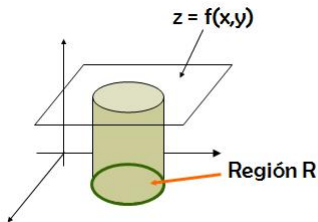
(c)  $m = n = 16, V \approx 46.46875$

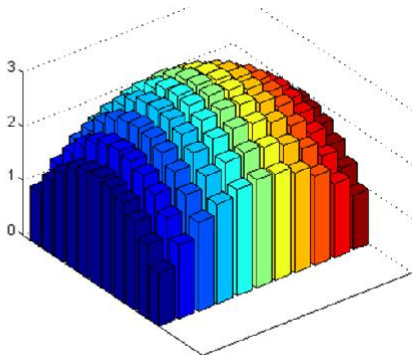
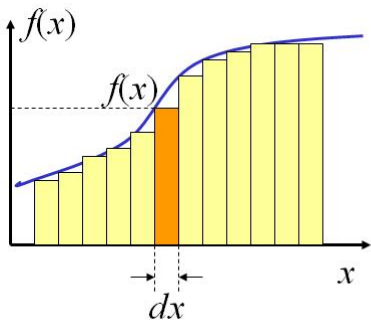
El volumen exacto del volumen es 48



## INTERPRETACIÓN GRÁFICA

La integral doble de una función no negativa en dos variables se interpreta como el volumen bajo la superficie  $z = f(x, y)$  y sobre la región  $R$  del plano  $XY$ .







# CÁLCULO DE INTEGRALES DOBLES

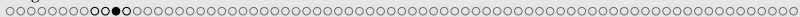
## Teorema (Teorema de Fubini)

Si  $f$  es integrable en el rectángulo

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$





## EJEMPLO

### Ejemplo

Si  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4\}$

Calcular:

$$\iint_R (6x^2 + 4xy^3) dA$$



# INTEGRAL DOBLE

## Definición (Definición de Integral Doble)

*Si  $f$  está definida en una región cerrada y acotada  $R$  del plano  $XY$ , la integral doble de  $f$  sobre  $R$  se define como*

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

*Supuesto que exista el límite, en cuyo caso se dice que  $f$  es integrable sobre  $R$ .*



## PROPIEDADES

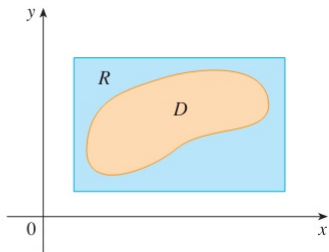
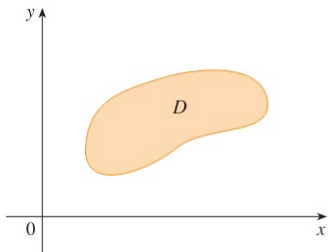
- a.  $\iint_R Kf(x, y)dA = K \iint_R f(x, y)dA$
- b.  $\iint_R (f(x, y) \pm g(x, y)) dA = \iint_R f(x, y)dA \pm \iint_R g(x, y)dA$
- c. Si  $f(x, y) > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}, \iint_R f(x, y)dA > 0$
- d. Si  $R = R_1 \cup R_2$ , donde  $R_1 \cap R_2 = \phi$

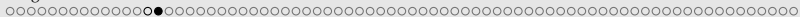
$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_{R_1} f(x, y)dA + \iint_{R_2} f(x, y)dA$$



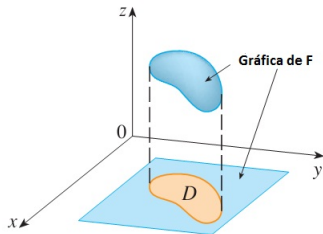
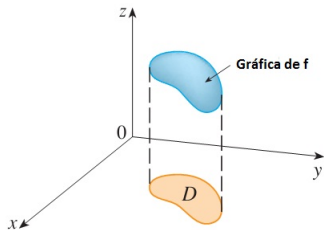
# INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$





$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA$$

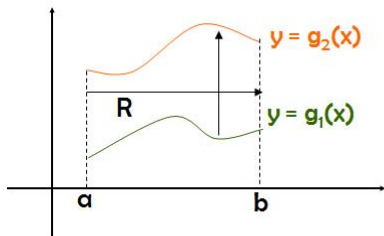


# LÍMITES DE INTEGRACIÓN

## Secciones transversales verticales (Barrido Vertical)

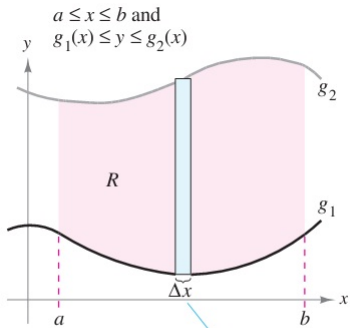
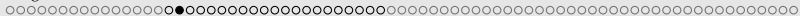
La región  $R$  está limitada por las gráficas de  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . Si  $R$  es descrita por

$$R : \quad a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$



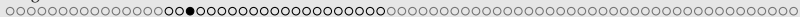
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$





$$\text{Area} = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \, dx$$

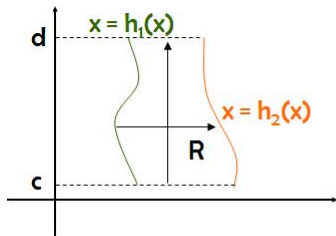




## Secciones transversales horizontales (Barrido Horizontal)

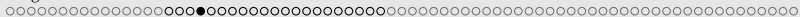
La región  $R$  está limitada por las gráficas de  $h_1$  y  $h_2$  en el intervalo  $[c, d]$ . Si  $R$  es descrita por

$$R : \quad c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

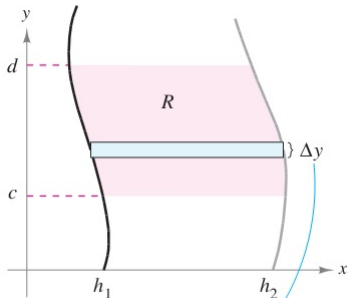


$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$





$$c \leq y \leq d \text{ and } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$



$$\text{Area} = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \, (dy)$$



## EJEMPLO

### Ejemplo

Calcular

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 160xy^3 dy dx$$

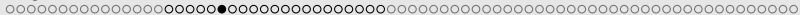
### Ejemplo

Calcular

$$\iint_R x dA$$

donde  $R$  es la región limitada por  $y = 2x$ ,  $y = x^2$  por los dos métodos (Barrido vertical y horizontal)





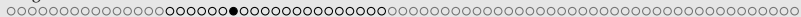
# EJERCICIO 1

## Ejercicio

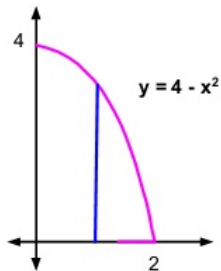
*Evaluar*

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy dx$$





# SOLUCIÓN



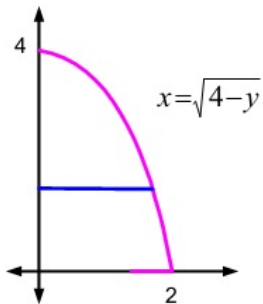
$$R : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy dx$$



# SOLUCIÓN

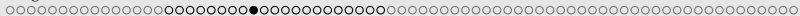
## Intercambiando Diferenciales



$$R : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx dy$$

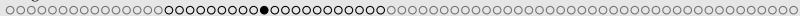




## SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx dy &= \int_0^4 \frac{x^2}{2} \frac{e^{2y}}{4-y} \Big|_0^{\sqrt{4-y}} \\
 &= \int_0^4 \left( \frac{4-y}{2} \frac{e^{2y}}{4-y} \right) dy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy \\
 &= \frac{1}{4} (e^8 - 1)
 \end{aligned}$$



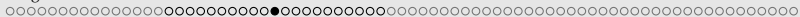


## EJERCICIO 2

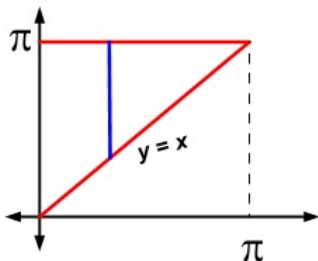
Ejercicio

$$\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy dx$$





# SOLUCIÓN



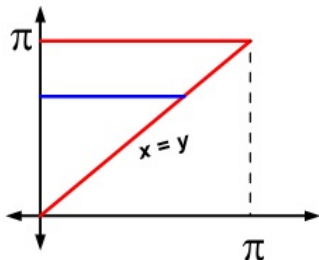
$$R : \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ x \leq y \leq \pi \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy dx$$



# SOLUCIÓN

## Intercambiando Diferenciales



$$R : \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy$$





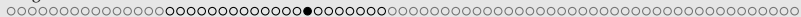
## SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx &= \int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} x \Big|_0^y \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} y dy = \int_0^\pi \sin y dy = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx = 2$$





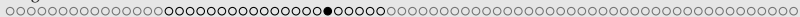
# EJERCICIO

## Ejercicio

Calcular  $\iint_R (2x + 1)dA$  donde  $R$  es el triángulo que tiene por vértices los puntos  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ .







## Ejemplo

Hallar el área de la región  $R$  limitada por las siguientes curvas

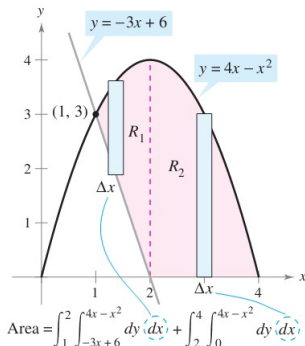
$$R : \begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x} \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$



# UN ÁREA REPRESENTADA POR DOS INTEGRALES ITERADAS

## Ejemplo

Hallar el área de la región  $R$  que se encuentra bajo la parábola  $y = 4x - x^2$ , sobre el eje  $X$ , y sobre la recta  $y = -3x + 6$



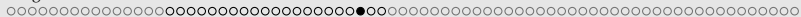
# SOLUCIÓN

## Secciones Verticales

$$R_1 : \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -3x + 6 \leq y \leq 4x - x^2 \end{cases}$$

$$R_2 : \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4x - x^2 \end{cases}$$





# SOLUCIÓN

$$R = R_1 \cup R_2$$

$$\text{Area}(R) = \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy dx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy dx$$

$$\text{Area}(R) = \frac{15}{2}$$



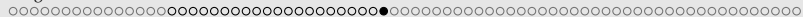
# CÁLCULO DE INTEGRALES DOBLES INVIRTIENDO LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN

Algunas integrales iteradas pueden ser calculadas de las dos formas, pero tenga mucho cuidado cuando invierte el orden de las integrales.

## Ejemplo

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} xy dy dx$$





## EJERCICIO

### Ejercicio

*Invierta el orden de integración para*

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy dx$$

### Ejercicio

*Invierta el orden de integración para*

$$\int_2^4 \int_x^{16/x} f(x, y) dy dx$$





# VALOR MEDIO PARA UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

## Definición

Sea  $f$  una función continua en las variables  $x$  e  $y$ . El Valor Medio de  $f$  en una región  $R$  está dado por:

$$\text{Valor Medio} = \frac{\iint_R f(x, y) dA}{\iint_R dA}$$





## Ejemplo

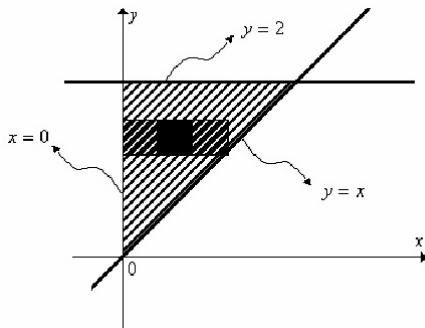
Encuentre el valor medio de la función  $f(x, y) = x\sqrt{1 + y^3}$  sobre la

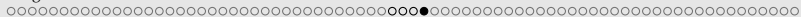
región limitada por  $\begin{cases} y = 2 \\ y = x \\ x = 0 \end{cases}$



# SOLUCIÓN

La región de integración es:





## SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}
 \text{Valor Medio} &= \frac{\iint_R f(x, y) dA}{\iint_R dA} = \frac{\int_0^2 \int_0^y x \sqrt{1 + y^3} dx dy}{\int_0^2 \int_0^y dx dy} \\
 &= \frac{\int_0^2 \sqrt{1 + y^3} \frac{x^2}{2} \Big|_0^y dy}{\int_0^2 x \Big|_0^y dy} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^2 y^2 \sqrt{1 + y^3} dy}{\int_0^2 y dy} = \frac{13}{6}
 \end{aligned}$$



# VOLUMENES CON INTEGRALES DOBLES

Si  $f(x, y) \geq 0$

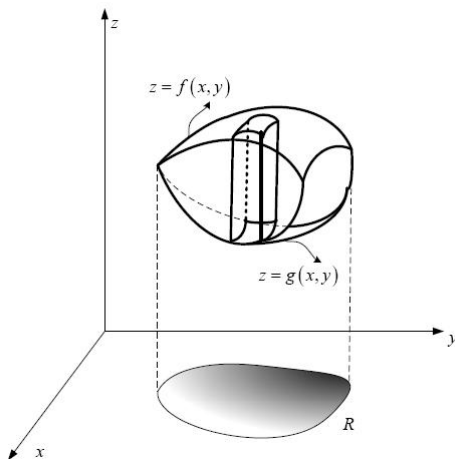
$$\text{Volumen} = \iint_R f(x, y) dA$$





## SOLIDO LIMITADO POR SUPERFICIES

Ahora consideremos un sólido limitado por superficies. Por ejemplo:



## SOLIDO LIMITADO POR SUPERFICIES

En el gráfico, el volumen del sólido limitado por las superficies está dado por:

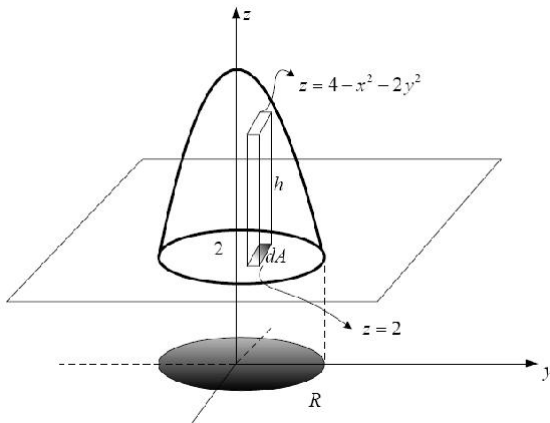
$$V = \iint_R [f(x, y) - g(x, y)] dA$$

R: es la región plana que tiene por proyección la superficie en el plano XY.



## Ejemplo

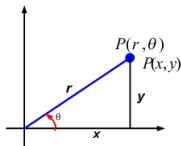
Hallar el volumen del sólido limitado por  $z = 4 - x^2 - 2y^2$  y el plano  $z = 2$ .



# INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

$$\iint_R f(r, \theta) dA$$

Definición (Coordenadas Polares y Rectangulares)



$$x = r \cos \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

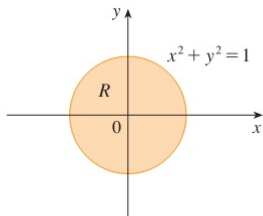
$$y = r \sin \theta, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$



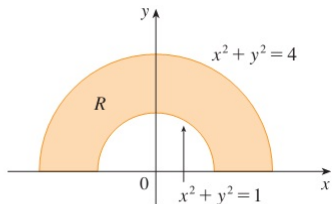
# INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

## Ejemplo

Utilizar coordenadas polares para describir cada una de las regiones mostradas en la figura



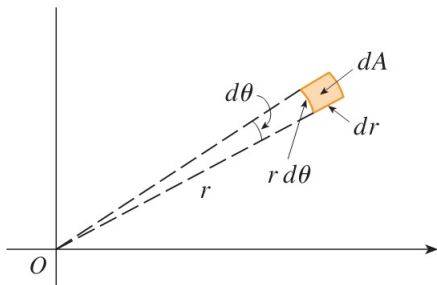
$$(a) R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



$$(b) R = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$



# DIFERENCIAL AREA EN COORDENADAS POLARES

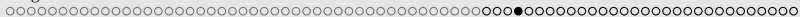


$$dA = (rd\theta)dr$$

$$dA = rd\theta dr$$

$$dA = r dr d\theta$$





## Definición

*Si  $f$  es una función continua en  $r$  y  $\theta$  en una región plana cerrada y acotada  $R$ , entonces la integral doble de  $f$  sobre  $R$ , en coordenadas polares, viene dada por*

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} f(r_i, \theta_i) r_i \Delta r_i \Delta \theta_i$$

*si el límite existe.*



# INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

## Teorema

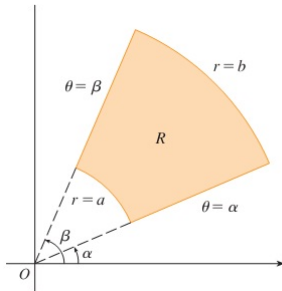
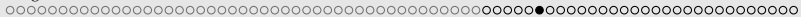
Sea  $f(r, \theta)$  continua en la región

$$D = \{(r, \theta) / \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad a \leq r \leq b\}$$

entonces

$$\int_D \int f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$



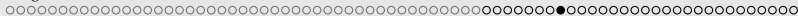


# EJEMPLO

## Ejemplo

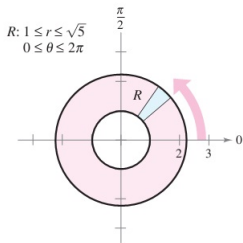
Sea  $R$  la región comprendida entre los dos círculos  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x^2 + y^2 = 5$ . Evaluar la integral  $\iint (x^2 + y) dA$





# SOLUCIÓN

$$\int \int_R (x^2 + y) dA$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} (r^2 \cos^2 \theta + r \sin \theta) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} (r^3 \cos^2 \theta + r^2 \sin \theta) dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^4}{4} \cos^2 \theta + \frac{r^3}{3} \sin \theta \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( 6 \cos^2 \theta + \frac{5\sqrt{5}-1}{3} \sin \theta \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( 3 + 3 \cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5}-1}{3} \sin \theta \right) d\theta \\
 &= \left( 3\theta + \frac{3 \sin 2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5}-1}{3} \cos \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 6\pi
 \end{aligned}$$



# INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

## Teorema

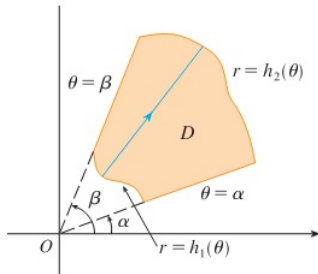
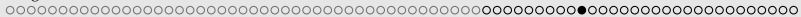
Sea  $f(r, \theta)$  continua en la región

$$D = \{(r, \theta) / \alpha \leq \theta \leq \beta \quad h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

entonces

$$\int_D \int f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$





# INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

## Teorema

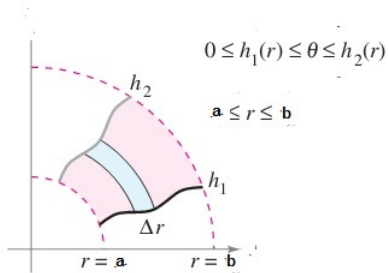
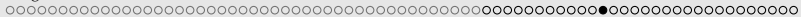
Sea  $f(r, \theta)$  continua en la región

$$D = \{(r, \theta) / a \leq r \leq b, \quad h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\}$$

entonces

$$\int_D \int f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$





## Ejemplo

Calcular  $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy dx$

## Ejemplo

Hallar el volumen del sólido limitado por  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 9$

## Ejemplo

Encuentre el volumen de la región limitada por las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad ; \quad x^2 + (y - 1)^2 = 1$$



# CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES DOBLES (TRANSFORMACIONES)

Supongamos que se tiene la siguiente transformación

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

Aplicando la integral doble

$$\int_R \int f(x, y) dA$$

quedará de la forma

$$\int_{R'} \int f(x(u, v), y(u, v)) dA$$

Donde  $R'$  es la región de integración en el plano  $UV$



## Teorema

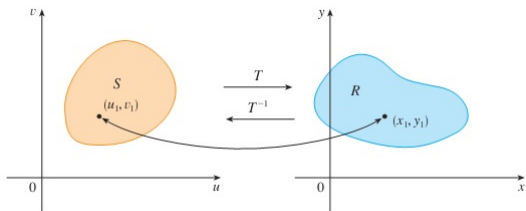
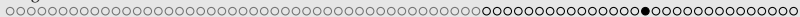
Sean  $R$  y  $S$  las regiones en los planos  $XY$  y  $UV$  respectivamente que están relacionadas por las ecuaciones  $x = G(u, v)$ ,  $y = H(u, v)$  mediante la cual la región  $R$  es la imagen de  $S$ . Si  $f$  es continua en la región  $R$  y además  $G$  y  $H$  tienen derivadas parciales continuas en  $S$  y  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  es no nulo en  $S$  entonces

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_{R'} \int f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

donde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$





$$T : UV \rightarrow XY$$

$$(u, v) \rightarrow T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$$

$$T^{-1} : XY \rightarrow UV$$

$$(x, y) \rightarrow T^{-1}(x, y) = (u, v) = (G(x, y), H(x, y))$$



# JACOBIANOS

$$T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$$

$$J_T(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$



# JACOBIANOS

$$T^{-1}(x, y) = (u, v) = (G(x, y), H(x, y))$$

$$J_{T^{-1}}(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$





## Ejemplo

Sea  $R$  la región limitada por las rectas

$$x - 2y = 0, \quad x - 2y = -4, \quad x + y = 4, \quad x + y = 1$$

Evaluar la siguiente integral

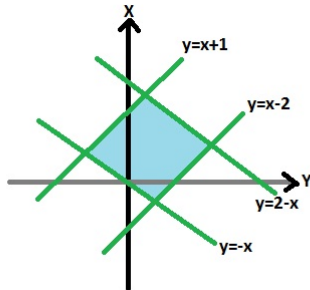
$$\int_R \int 3xy dS$$





# SOLUCIÓN

## Ubicación de la región $R$



# SOLUCIÓN

Rectas que limitan la región  $R$

$$x - y = -1 \quad x + y = 0$$

$$x - y = 2 \quad x + y = 2$$

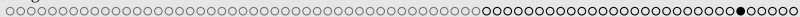
Sea

$$u = x - y, \quad u = -1, \quad u = 2$$

$$v = x + y, \quad v = 0, \quad v = 2$$







$$T^{-1}(x, y) = (u, v) = (x - y, x + y)$$

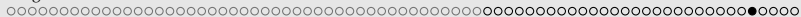
Jacobiano de  $T^{-1}$

$$J_{T^{-1}}(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

$$J_{T^{-1}}(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$J_{T^{-1}}(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$





$$T^{-1}(x, y) = (u, v) = (x - y, x + y)$$

Jacobiano de  $T^{-1}$

$$J(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 2$$

Jacobiano de  $T$

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2}$$



# SOLUCIÓN

$$\iint_R dA = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| dudv$$

$$\iint_R y dA = \iint_D \left( \frac{v-u}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) dA$$

$$\iint_R y dA = \frac{1}{4} \int_0^2 \int_{-1}^2 dudv$$

$$\iint_R y dA = \frac{3}{4}$$



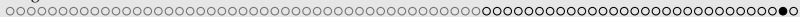
## Ejercicio

Evalue la integral doble indicada, efectuando un cambio de variables

$$\iint_R x^2 y^2 dA$$

donde  $R$  es la región situada en el primer cuadrante y limitada por las hipérbolas equilateras:  $xy = 1, xy = 2$  y las rectas :  $x = 2y, y = 3x$





## Ejercicio

Calcular  $\int_0^1 \int_x^{2x} dy dx$  empleando el siguiente cambio de variable

$$x = u(1 - v)$$

$$y = uv$$





## Ejercicio

Calcular

$$I = \int_D \int e^{-(2x^2 - 2xy + 5y^2)} \arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right) dA$$

donde

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 2x^2 - 2xy + 5y^2 \leq 9, \right.$$

$$\left. (1 - \sqrt{3})x + (1 + 2\sqrt{3})y \leq 0, \quad \sqrt{3}(x + y) \geq x - 2y \right\}$$

