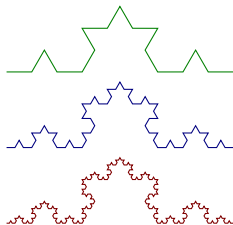


# Integración Numérica

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería Mecánica



Métodos Numérico

# Agenda



## Integración Numérica

Mg. Hermes Pantoja C.

## Introducción

Integración Numérica

## Métodos de Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

## Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

## Método de Romberg

Método de Romberg

## Introducción

Integración Numérica

## Métodos de Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

## Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

## Método de Romberg

Método de Romberg



- ▶ Para una función integrable  $f$  en el intervalo  $[a; b]$ , considere la integral definida

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

- ▶ Una fórmula para aproximar  $I(f)$  se llama cuadratura o fórmula de integración numérica.

3

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg



Sea  $f_n$  una aproximación de  $f$  en el intervalo  $[a; b]$ , podemos aproximar a  $I(f)$  integrando la aproximación de  $f$  en el intervalo  $[a; b]$ , denotando esa aproximación como  $I_n(f)$  se obtiene

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x) dx$$

4

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg



- ▶ Si la aproximación  $f_n(x)$  de la función  $f(x)$  se hace usando algún polinomio de interpolación, la cuadratura resultante se llama fórmula de Newton-Cotes.
- ▶ Por otro lado, si se usa un polinomio que aproxima a la función en términos de cuadrados mínimos, la cuadratura resultante se llama cuadratura gaussiana.

5

### Introducción

Integración Numérica

### Métodos de Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

Intermedio

### Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

### Método de Romberg

Método de Romberg

58

# Cuadraturas de Newton-Cotes



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

- ▶ Una aproximación de  $f$  que es fácil de integrar es una que se obtiene tomando

$$f_n(x) = p_n(x)$$

donde  $p_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$  o menor.

- ▶ Tomamos el polinomio de interpolación de Lagrange en los  $n + 1$  nodos de interpolación  $\{x_i\}$ ,  $i = 0, \dots, n$ .
- ▶ Se obtiene

$$I_n(f) = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx$$

Introducción

6 Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Cuadraturas de Newton-Cotes



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

7 Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor

Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

- ▶ La fórmula general de cuadraturas se puede escribir

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

- ▶ Interpolación con polinomios de Lagrange es un caso especial donde  $\alpha_i = \int_a^b l_i(x) dx$ .

# Método del Trapecio



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

8

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

- ▶ Se obtiene reemplazando la función  $f$  por el polinomio de Lagrange de grado uno en los nodos de interpolación  $x_0 = a$  y  $x_1 = b$ .
- ▶ Sea  $f$  una función con segunda derivada continua y sean  $y_0 = f(x_0)$  y  $y_1 = f(x_1)$ .

# Método del Trapecio



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

- ▶ El polinomio de Lagrange de grado uno que interpola los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  está dado por

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

con error

$$E(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(\xi(x))$$

para  $\xi$  entre  $a$  y  $b$

- ▶ De aquí que

$$f(x) = p_1(x) + E(x)$$

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

9 Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Método del Trapecio



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

- ▶ Integrando  $f(x)$  de  $x_0$  a  $x_1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} E(x) dx$$

- ▶ La primera integral se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx &= y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx + y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx \\ &= y_0 \frac{h}{2} + y_1 \frac{h}{2} = h \left( \frac{y_0 + y_1}{2} \right) \end{aligned}$$

donde  $h = x_1 - x_0$

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

10

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58

# Método del Trapecio



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

11

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

- ▶ La cuadratura resultante es

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

- ▶ La cual en la fórmula de Newton -Cotes tiene pesos  $\alpha_0 = \alpha_1 = (b-a)/2$

# Método del Trapecio



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

- ▶ Integrando el error de interpolación

$$E_1(x) = \int_a^b (f(x) - p_1(x)) dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi(x)) dx$$

- ▶ Usando el **Teorema de Valor Medio de la Integral**, para algún  $\xi \in [a; b]$ , se obtiene

$$E_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx$$

- ▶ Luego de integrar, el error de la cuadratura es

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

12

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura

Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58



## Fórmula de los Trapecios

### ◆ Simple

$$I_T = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

### ◆ Error

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

### Introducción

Integración Numérica

### Métodos de Integración

13 Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

### Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

### Método de Romberg

Método de Romberg

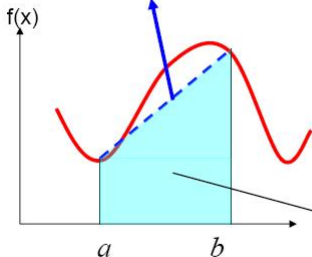
# Método del Trapecio



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$



$$I = \int_a^b f(x) dx$$

$$I \approx \int_a^b \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right) dx$$

$$= \left( f(a) - a \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x \Big|_a^b$$

$$+ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b$$

$$= \boxed{(b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2}}$$

Integración

Numérica

Métodos de Integración

del Trapecio

de Simpson

de Compuesto

de Gaussiana

de Romberg

de Romberg

de Romberg

# Método del Trapecio



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Introducción

Integración Numérica

## Métodos de Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

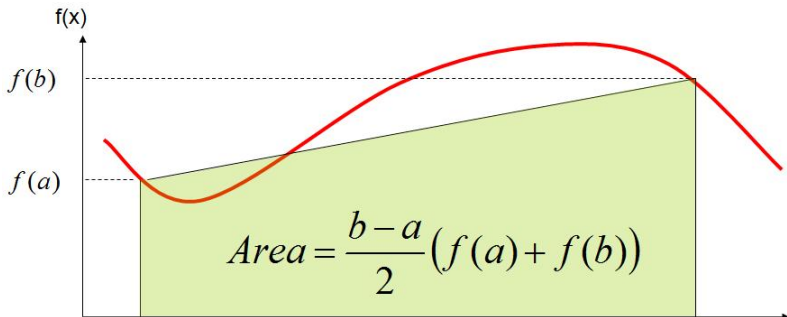
## Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

## Método de Romberg

Método de Romberg



# Método de Simpson



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

16

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

Se obtiene reemplazando  $f$  en  $[a, b]$  por el polinomio de interpolación de Lagrange de grado 2 en los nodos

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{(a + b)}{2}, \quad \text{y} \quad x_2 = b.$$

# Método de Simpson



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

La función  $f(x)$  la podemos escribir como la suma del polinomio de interpolación de Lagrange de grado dos con el error de interpolación:

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} f'''(\xi(x)) \\ &= p(x) + E(x) \end{aligned}$$

17

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor

Intermedio

Cuadratura

Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58

# Método de Simpson



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

18

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

Integrando obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} p(x) dx + \int_{x_0}^{x_2} E(x) dx$$

# Método de Simpson



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Aquí

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} p(x) dx &= y_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx \\ &+ y_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx \\ &+ y_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx \\ &= y_0 \frac{h}{3} + y_1 \frac{4h}{3} + y_2 \frac{h}{3}\end{aligned}$$

$$h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$$

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

19 Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

# Método de Simpson



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

20

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

Si la función  $f(x)$  tiene cuarta derivada continua, usando el Teorema del Valor Medio de la Integral nuevamente y luego de tomar la integral se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_2} E(x) dx = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi)$$

para algún  $\xi \in [a, b]$

# Método de Simpson



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

- ▶ La cuadratura resultante es

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

- ▶ La cual en la fórmula de Newton-Cotes tiene pesos

$$\alpha_0 = \alpha_2 = (b-a)/6 \text{ y } \alpha_1 = 4(b-a)/6$$

21

58

# Fórmula de Simpson



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## ◆ Simple

$$I_s = \frac{h}{3} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\}$$

## ◆ Error

$$E_s = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

22

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58

# Ejemplo



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Ejemplo

*Aplique las reglas del Trapecio y de Simpson para aproximar*

$$\int_1^2 \ln x dx$$

*y encuentre una cota para el error para cada aproximación*

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

23

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58



## Regla del trapecio



$$\int_1^2 \ln x dx \approx \frac{h}{2}(\ln 1 + \ln 2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0.34657359$$

- ▶ Sea  $f(x) = \ln x$ ,  $f''(x) = -1/x^2$ , y el error de la fórmula del trapecio se puede acotar en el intervalo  $[1, 2]$  como sigue

$$\left| -\frac{h^3}{12} f''(x) \right| \leq \frac{1}{12} \approx 0.08333$$

Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

24

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica



## Integración Numérica

Mg. Hermes Pantoja C.

Finalmente,

$$\int_1^2 \ln x dx = 0.3466 \pm 0.08333$$

El valor exacto de la integral debe estar dentro de este intervalo.

### Introducción

Integración Numérica

### Métodos de Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

25

### Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

### Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

### Método de Romberg

Método de Romberg



## Regla de Simpson



$$\int_1^2 \ln x dx \approx \frac{2-1}{6} (\ln 1 + 4 \ln \frac{3}{2} + \ln 2) \approx 0.385834602$$

- ▶ Sea  $f(x) = \ln x$ ,  $f^{iv}(x) = -6/x^4$ , y el error de la fórmula de Simpson se puede acotar en el intervalo  $[1, 2]$  como sigue

$$\left| -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(x) \right| \leq 6 \frac{(0.5)^5}{90} \approx 0.002083333$$

Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

26

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58



## Integración Numérica

Mg. Hermes Pantoja C.

Finalmente,

$$\int_1^2 \ln x dx = 0.3858 \pm 0.002083$$

Note que el valor exacto de la integral está dentro de este intervalo y esta aproximación es más precisa que la que se obtiene con el método del trapecio.

### Introducción

Integración Numérica

### Métodos de Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

27

### Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

### Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

### Método de Romberg

Método de Romberg

## Deducción de la regla de Simpson 3/8

Se parte del polinomio de interpolación de Newton en diferencias finitas:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{1}{h} \Delta y_0 (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} x = x_0 + sh & \quad (x - x_0) = sh \\ x = x_1 + (s - 1)h & \quad (x - x_1) = (s - 1)h \\ x = x_2 + (s - 2)h & \quad (x - x_2) = (s - 2)h \end{aligned}$$

## Deducción de la regla de Simpson 3/8

Se obtiene:

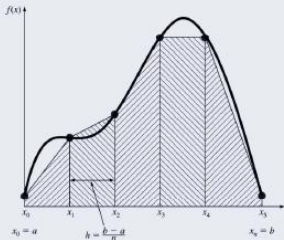
$$P_n(x) = y_0 + s(y_1 - y_0) + \frac{s(s-1)}{2!}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)$$

$$\int_0^3 s ds = \frac{9}{2}; \int_0^3 s(s-1) ds = \frac{9}{2}; \int_0^3 s(s-1)(s-2) ds = \frac{9}{4}$$

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x) dx = h \int_0^3 P_3(s) ds = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

# Regla del Trapecio Compuesto

- Asumiendo  $n+1$  puntos igualmente espaciados, se tendrá  $n$  subintervalos a integrar.
- La integral total pueden ser calculado integrando cada subintervalo para luego sumarlo.



$$I = \int_{x_0}^{x_n} f_n(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f_n(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(x) dx$$

$$I = (x_1 - x_0) \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + (x_2 - x_1) \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

$$I = \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

# Regla del Trapecio Compuesto



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## ◆ Compuesta

$$I_T[h] = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

## ◆ Error

$$E_T = -\frac{h^2}{12} (b-a)f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

## ◆ Exacta para funciones de 1<sup>er</sup> grado

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor

Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

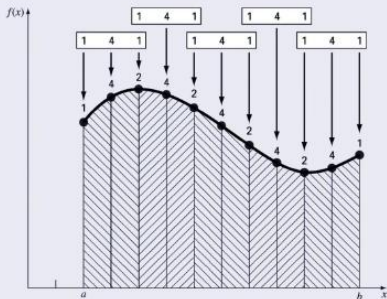
Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

# Regla del Simpson Compuesto

La regla de Simpson 1/3 puede ser utilizado en un conjunto de subintervalos de la misma manera que la regla trapezoidal, excepto que debe haber un número impar de puntos.



$$I = \int_{x_0}^{x_n} f_n(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f_n(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f_n(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f_n(x) dx$$

$$I = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$I = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i, \text{ odd}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ j, \text{ even}}}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

# Regla del Simpson Compuesto



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## ◆ Compuesta

$$I_S[h] = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

## ◆ Error

$$E_S = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{IV}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

## ◆ Exacta para polinomios de 3<sup>er</sup> grado

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

**Simpson Compuesto**

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

# Teorema de Valor Intermedio



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

34 Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

## Teorema

Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y sea  $g$  una función integrable **que no cambia de signo** en el intervalo  $[a, b]$ . Existe un número  $\xi$  entre  $a$  y  $b$  tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

◀ Regresar

# Cuadratura Gaussiana



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

35

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58

- ▶ Veremos en esta clase la Regla de la Fórmula de Cuadratura de Gauss.
- ▶ Las Fórmulas de Newton-Cotes integran polinomios interpolantes
- ▶ La Fórmula Cuadratura de Gauss integra exactamente polinomios de grado  $< 2n + 2$
- ▶ Como los métodos de Newton - Cotes escribimos una integral como

$$\int_a^b f(x)dx = A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + \dots + A_nf(x_n)$$

donde los coeficientes  $A_i$  y los puntos  $x_i$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  deben ser determinados de modo de obtener la mejor precisión posible.

Característica: Partición no regular

# Cuadratura Gaussiana para 2 puntos



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

$$I = \int_a^b f(x)dx = A_0f(x_0) + A_1f(x_1)$$

Por simplicidad tomemos el intervalo  $[-1, 1]$ . Note que siempre es posible pasar del intervalo:

$$[a, b] \longrightarrow [-1, 1]$$

a través de la transformación:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a) & \text{para } t \in [-1, 1] \\ dx = x'(t)dt = \frac{1}{2}(b-a)dt \end{cases}$$

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor

Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

36

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

# Cuadratura Gaussiana para 2 puntos



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Luego:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x(t))x'(t)dt = \int_{-1}^1 F(t)dt$$

donde:

$$F(t) = \frac{1}{2}(b-a)f\left(\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)\right)$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 F(t)dt = A_0F(t_0) + A_1F(t_1)$$

donde los parametros  $A_0, A_1, t_0, t_1$  deben ser determinados de modo que la integral es exacta para polinomios de grado menor o igual a 3.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

37

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58

# Cuadratura Gaussiana para 2 puntos



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Considerando:

$$F_0(t) = 1, F_1(t) = t, F_2(t) = t^2, F_3(t) = t^3$$

Podemos determinar las incógnitas

$$A_0, A_1, t_0, t_1$$

A través de

$$I = \int_{-1}^1 t^k dt = A_0 t_0^k + A_1 t_1^k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3$$

Que genera un sistema lineal  $4 \times 4$ . Veamos:

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

38

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58

# Cuadratura Gaussiana para 2 puntos



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Obtenemos el sistema

$$k = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 t^0 dt = A_0 t_0^0 + A_1 t_1^0 \Rightarrow A_0 + A_1 = 2$$

$$k = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 t^1 dt = A_0 t_0^1 + A_1 t_1^1 = 0$$

$$k = 2 \Rightarrow \int_{-1}^1 t^2 dt = A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 = 2/3$$

$$k = 3 \Rightarrow \int_{-1}^1 t^3 dt = A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3 = 0$$

Resolviendo el sistema, obtenemos

$$A_0 = A_1 = 1 \quad t_0 = -t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

39

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58

# Cuadratura Gaussiana para 2 puntos



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

De modo que podemos escribir la Fórmula de Cuadratura Gaussiana, que es exacta para polinomios de grado menores o iguales a 3

$$I_{Gauss} = \int_{-1}^1 F(t) dt = F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

40

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58

# Cuadratura Gaussiana para 3 puntos



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Para 3 puntos, la fórmula de cuadratura gaussiana es exacta para polinomios de grado menores e iguales a 5. Entonces,

$$I = \int_{-1}^1 F(t) dt = A_0 F(t_0) + A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2)$$

Considerando:

$$F_0(t) = 1, F_1(t) = t, F_2(t) = t^2, F_3(t) = t^3, F_4(t) = t^4$$

$$I_{Gauss} = \int_{-1}^1 F(t) dt = \frac{5}{9} F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} F(0) + \frac{5}{9} F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor

Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

41

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58

# Polinomios de Legendre



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Resulta que las  $t_i$  para unas  $n$  dadas son las raíces del polinomio de Legendre de grado  $n$ . Los polinomios de Legendre se definen en forma recurrente:

$$(n + 1)L_{n+1}(x) - (2n + 1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

$$\text{con } L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x$$

Entonces  $L_2(x)$  es

$$n = 1; \quad L_2(x) = \frac{3xL_1(x) - (1)L_0(x)}{2} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

cuyos ceros son  $\pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0.5773$ , precisamente son los valores de  $t$  para la fórmula de dos términos.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

42

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58



En la tabla siguiente se enumeran los ceros de los polinomios de Legendre para  $n = 2, 3, 4, 5$

$n$	Raíces	Coefficientes
2	-0.57735027	1
	0.57735027	1
3	-0.77459667	0.55555555
	0.0	0.88888889
	0.77459667	0.55555555
4	-0.86113631	0.34785485
	-0.33998104	0.65214515
	0.33998104	0.65214515
	0.86113631	0.34785485
5	-0.90617975	0.23692689
	-0.53846931	0.47862867
	0.0	0.56888889
	0.53846931	0.47862867
	0.90617975	0.23692689

Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

43

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58

# Ejemplos



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Ejemplo

Calcule  $I = \int_1^3 3e^x dx$  utilizando cuadratura gaussiana para 2 y 3 puntos.

### Solución:

Tenemos  $f(x) = 3e^x$  en el intervalo  $[1, 3]$ . Haciendo el cambio de variable

$$x(t) = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a) = t + 2$$

Para  $x \in [1, 3]$  tenemos  $t \in [-1, 1]$   
 $\Rightarrow dx = x'(t)dt = 1 dt$  y  $F(t) = 3e^{t+2}$

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

44

Método de  
Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de  
Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

58



## Integración Numérica

Mg. Hermes Pantoja C.

### Introducción

Integración Numérica

### Métodos de Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

### Cuadratura

Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

### Método de Romberg

Método de Romberg

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería  
Mecánica

$$\text{Exacto : } I = \int_1^3 3e^x dx = 52.1018$$

$$\begin{aligned}n = 2 : \int_1^3 3e^x dx &\approx I_{Gauss} = \int_{-1}^1 F(t) dt = F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \\ &= 3e^{\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}+2\right)} + 3e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+2\right)} = 51.9309\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n = 3 : \int_1^3 3e^x dx &\approx I_{Gauss} = \int_{-1}^1 F(t) dt = \frac{5}{9}F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}F(0) + \frac{5}{9}F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \\ &= 3\frac{5}{9}e^{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}+2\right)} + 3\frac{8}{9}e^2 + 3\frac{5}{9}e^{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+2\right)} = 52.1004\end{aligned}$$



## Integración Numérica

Mg. Hermes Pantoja C.

### Ejercicio

Calcule  $I = \int_2^{10} e^{-x} dx$  utilizando cuadratura gaussiana para 2 puntos.

#### Introducción

Integración Numérica

#### Métodos de Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

#### Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

46

#### Método de Romberg

Método de Romberg

58

# Método de Romberg



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

47 Método de Romberg

El Método de Romberg utiliza la Regla del Trapecio compuesto para obtener aproximaciones preliminares y enseguida aplicar un proceso de extrapolación de Richardson para mejorar la aproximación.

**Método de Romberg = Trapecio Compuesto +  
Extrapolación de Richardson**

# Extrapolación de Richardson



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

48 Método de Romberg

La extrapolación de Richardson siempre es utilizada para generar resultados de alta precisión, cuando se usan fórmulas de Newton-Cotes de menor grado.



Los primeros pasos del procedimiento de Romberg es obtener las aproximaciones por la Regla del trapecio compuesto para

$$m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4, \dots m_n = 2^{n-1} \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}$$

## RECORDANDO LA REGLA DEL TRAPECIO COMPUESTO

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

donde  $\xi \in \langle a, b \rangle$ ,  $h = (b-a)/m$  y  $x_i = a + ih$  con  $i = 1, 2, \dots, m$

Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

49 Método de Romberg



La regla del trapecio compuesto con la notación

$$h_k = \frac{b-a}{m_k} = \frac{b-a}{2^{k-1}} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

En esta notación, la regla del trapecio compuesto se escribe como

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h_k}{2} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

donde  $\xi \in \langle a, b \rangle$

Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Regla de Simpson Compuesto

Teoría de Valor

Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

50 Método de Romberg



Introducimos la notación  $R_{k1}$

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$\begin{aligned} R_{2,1} &= \frac{h_2}{2} [f(a) + f(b) + 2f(a+h_2)] = \\ &= \frac{(b-a)}{4} \left[ f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [R_{1,1} + h_1 f(a+h_2)] \end{aligned}$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} [R_{2,1} + h_2 \{f(a+h_3) + f(a+3h_3)\}]$$

Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

51 Método de Romberg



Tenemos la aproximación de la regla del trapecio

$$R_{k1} = \frac{1}{2} \left[ R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i-1)h_k) \right] \quad k = 2, 3, \dots, n$$

Comentario: estamos en el paso 1 del Método de Romberg calculando aproximaciones preliminares via Regla del trapecio.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

52 Método de Romberg



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

## Ejemplo

*Utilice la Regla del Trapecio Compuesto para realizar los primeros pasos del esquema de la integración de Romberg para obtener una aproximación de la integral*

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

*Para  $k = 1, 2, \dots, 6$ .*

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor

Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

53 Método de Romberg



tenemos:

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2} [\text{sen } 0 + \text{sen } \pi] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} [R_{1,1} + \pi \text{sen } (\pi/2)] = 1.57079633$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} [R_{2,1} + (\pi/2) \{\text{sen } (\pi/4) + \text{sen } (3\pi/4)\}]$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2} [R_{3,1} + (\pi/4) \{\text{sen } (\pi/8) + \text{sen } (3\pi/8) + \text{sen } (5\pi/8) + \text{sen } (7\pi/8)\}]$$

$$R_{5,1} = 1.99357034 \quad \text{e} \quad R_{6,1} = 1.99839336$$

## Integración Numérica

nes  
C.

l  
érica

ecio  
son

isto  
isto

siana

### Romberg

54

Método de Romberg

58



## Integración Numérica

Mg. Hermes Pantoja C.

Como el resultado exacto de la integral es

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2$$

la convergencia es bastante lenta!

Utilizaremos a extrapolación de Richardson para acelerar la convergencia.

### Introducción

Integración Numérica

### Métodos de Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

### Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

### Método de Romberg

55 Método de Romberg

# Extrapolación de Richardson



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

La extrapolación de Richardson es:

$$R_{k,2} = \left[ \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} \right]$$

Continuando el procedimiento:

$$R_{k,j} = \left[ \frac{4^{j-1}R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \right]$$

generamos la tabla de Romberg

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

56 Método de Romberg



## Integración Numérica

Mg. Hermes Pantoja C.

tenemos:

$R_{1,1}$					
$R_{2,1}$	$R_{2,2}$				
$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	....	$R_{n,n}$

### Introducción

Integración Numérica

### Métodos de Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor Intermedio

### Cuadratura Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

### Método de Romberg

Método de Romberg

57

58

# Ejemplo



Integración  
Numérica

Mg. Hermes  
Pantoja C.

Introducción

Integración Numérica

Métodos de  
Integración

Método del Trapecio

Método de Simpson

Ejemplos

Trapecio Compuesto

Simpson Compuesto

Teorema de Valor  
Intermedio

Cuadratura  
Gaussiana

Cuadratura Gaussiana

Método de  
Romberg

58 Método de Romberg

Aplicando en el ejemplo  $\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx$

0.0					
1.57079633	2.09439511				
1.89611890	2.00455976	1.99857073			
1.97423160	2.00026917	1.99998313	2.00000555		
1.99357034	2.00001659	1.99999975	2.00000001	1.99999999	
1.99839336	2.00000103	2.0000000	2.0000000	2.0000000	2.0000000