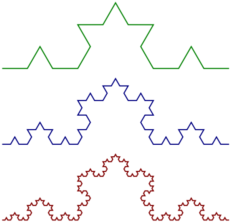
Integración Numérica

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Industrial
Universidad Nacional Mayor de San Marcos



Métodos Computacionales

Contenido

INTRODUCCIÓN

- Para una función integrable f en el intervalo $[a; b]$, considere la integral definida

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

- Una fórmula para aproximar $I(f)$ se llama cuadratura o fórmula de integración numérica.

INTRODUCCIÓN

Sea f_n una aproximación de f en el intervalo $[a; b]$, podemos aproximar a $I(f)$ integrando la aproximación de f en el intervalo $[a; b]$, denotando esa aproximación como $I_n(f)$ se obtiene

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x)dx$$

INTRODUCCIÓN

- Si la aproximación $f_n(x)$ de la función $f(x)$ se hace usando algún polinomio de interpolación, la cuadratura resultante se llama fórmula de Newton-Cotes.
- Por otro lado, si se usa un polinomio que aproxima a la función en términos de cuadrados mínimos, la cuadratura resultante se llama cuadratura gaussiana.

Cuadraturas de Newton-Cotes

- Una aproximación de f que es fácil de integrar es una que se obtiene tomando

$$f_n(x) = p_n(x)$$

donde $p_n(x)$ es un polinomio de grado n o menor.

- Tomamos el polinomio de interpolación de Lagrange en los $n+1$ nodos de interpolación $\{x_i\},\ i = 0, \ldots, n$.
- Se obtiene

$$I_n(f) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) I_i(x) dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b I_i(x) dx$$

Cuadraturas de Newton-Cotes

- La fórmula general de cuadraturas se puede escribir

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

- Interpolación con polinomios de Lagrange es un caso especial donde $\alpha_i = \int_a^b I_i(x)dx$.

Método del Trapecio

- Se obtiene reemplazando la función f por el polinomio de Lagrange de grado uno en los nodos de interpolación $x_0 = a$ y $x_1 = b$.
- Sea f una función con segunda derivada continua y sean $y_0 = f(x_0)$ y $y_1 = f(x_1)$.

Método del Trapecio

- El polinomio de Lagrange de grado uno que interpola los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) esta dado por

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

con error

$$E(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(\xi(x))$$

para ξ entre a y b

- De aquí que

$$f(x) = p_1(x) + E(x)$$

MÉTODO DEL TRAPECIO

- Integrando $f(x)$ de x_0 a x_1

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} E(x)dx$$

- La primera integral se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx = y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}dx + y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}dx$$

$$= y_0\frac{h}{2} + y_1\frac{h}{2} = h\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right)$$

donde $h = x_1 - x_0$

Método del Trapecio

- La cuadratura resultante es

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

- La cual en la fórmula de Newton -Cotes tiene pesos $\alpha_0 = \alpha_1 = (b-a)/2$

Método del Trapecio

- Integrando el error de interpolación

$$E_1(x) = \int_a^b (f(x) - p_1(x))dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi(x))dx$$

- Usando el Teorema de Valor Medio de la Integral , para algún $\xi \in [a;b]$, se obtiene

$$E_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

- Luego de integrar, el error de la cuadratura es

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

Método del Trapecio

- Integrando el error de interpolación

$$E_1(x) = \int_a^b (f(x) - p_1(x))dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi(x))dx$$

- Usando el Teorema de Valor Medio de la Integral, para algún $\xi \in [a; b]$, se obtiene

$$E_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

- Luego de integrar, el error de la cuadratura es

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

Método del Trapecio

Fórmula de los Trapecios

- Simple

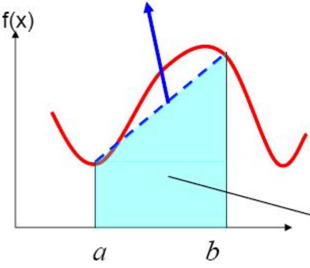
$$\boxed{I_T = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

- Error

$$\boxed{E_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]}$$

Método del Trapecio

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$



$$I=\int_a^b f(x)dx$$

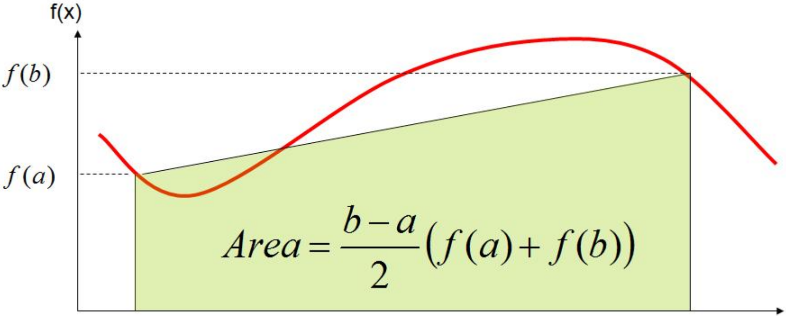
$$I\approx\int_a^b\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)dx$$

$$=\left(f(a)-a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x\Big|_a^b$$

$$+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$

$$\boxed{=(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}}$$

Método del Trapecio



Método de Simpson

Se obtiene reemplazando f en $[a, b]$ por el polinomio de interpolación de Lagrange de grado 2 en los nodos $x_0 = a,\ x_1 = \dfrac{(a+b)}{2}$, y $x_2 = b$.

MÉTODO DE SIMPSON

La función $f(x)$ la podemos escribir como la suma del polinomio de interpolación de Lagrange de grado dos con el error de interpolación:

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ &\quad +y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}f'''(\xi(x)) \\ &= p(x)+E(x) \end{aligned}$$

Método de Simpson

Integrando obtenemos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} p(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} E(x)dx$$

Método de Simpson

Aquí

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} p(x)dx &= y_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx \\
&\quad + y_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
&\quad + y_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= y_0\frac{h}{3} + y_1\frac{4h}{3} + y_2\frac{h}{3}
\end{aligned}
$$

$h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$

Método de Simpson

Si la función $f(x)$ tiene cuarta derivada continua, usando el Teorema del Valor Medio de la Integral nuevamente y luego de tomar la integral se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_2} E(x)dx = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi)$$

para algún $\xi \in [a, b]$

Método de Simpson

- La cuadratura resultante es

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

- La cual en la fórmula de Newton-Cotes tiene pesos

$$\alpha_0 = \alpha_2 = (b-a)/6 \ \text{ y } \ \alpha_1 = 4(b-a)/6$$

Fórmula de Simpson

- Simple

$$I_s = \frac{h}{3}\left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\}$$

- Error

$$E_s = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

Ejemplo

Ejemplo

Aplique las reglas del Trapecio y de Simpson para aproximar

$$\int_1^2 \ln x dx$$

y encuentre una cota para el error para cada aproximación

Regla del trapecio

- $$\int_1^2 \ln x dx \approx \frac{h}{2}(\ln 1 + \ln 2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}34657359$$

Regla del trapecio

- $$\int_1^2 \ln x dx \approx \frac{h}{2}(\ln 1 + \ln 2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}34657359$$
- Sea $f(x) = \ln x$, $f''(x) = -1/x^2$, y el error de la fórmula del trapecio se puede acotar en el intervalo $[1, 2]$ como sigue

$$\left| -\frac{h^3}{12} f''(x) \right| \leq \frac{1}{12} \approx 0{,}08333$$

Finalmente,

$$\int_1^2 \ln x dx = 0{,}3466 \pm 0{,}08333$$

Finalmente,

$$\int_1^2 \ln x dx = 0{,}3466 \pm 0{,}08333$$

El valor exacto de la integral debe estar dentro de este intervalo.

Regla de Simpson

- $$\int_1^2 \ln x dx \approx \frac{2-1}{6}(\ln 1 + 4\ln\frac{3}{2} + \ln 2) =\approx 0{,}385834602$$

Regla de Simpson

- $$\int_1^2 \ln x dx \approx \frac{2-1}{6}(\ln 1 + 4\ln\frac{3}{2} + \ln 2) =\approx 0{,}385834602$$

- Sea $f(x) = \ln x$, $f^{iv}(x) = -6/x^4$, y el error de la fórmula de Simpson se puede acotar en el intervalo $[1,2]$ como sigue

$$\left|-\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(x)\right| \leq 6\frac{(0{,}5)^5}{90} \approx 0{,}002083333$$

Finalmente,

$$\int_1^2 \ln x dx = 0{,}3858 \pm 0{,}002083$$

Finalmente,

$$\int_1^2 \ln x dx = 0{,}3858 \pm 0{,}002083$$

Note que el valor exacto de la integral está dentro de este intervalo y esta aproximación es más precisa que la que se obtiene con el método del trapecio.

Deducción de la regla de Simpson 3/8

Se parte del polinomio de interpolación de Newton en diferencias finitas:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{1}{h}\Delta y_0(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\begin{array}{ll} x = x_0 + sh & (x - x_0) = sh \\ x = x_1 + (s-1)h & (x - x_1) = (s-1)h \\ x = x_2 + (s-2)h & (x - x_2) = (s-2)h \end{array}$$

Deducción de la regla de Simpson 3/8

Se obtiene:

$$P_n(x) = y_0 + s(y_1 - y_0) + \frac{s(s-1)}{2!}(y_2 - 2y_1 + y_0)$$

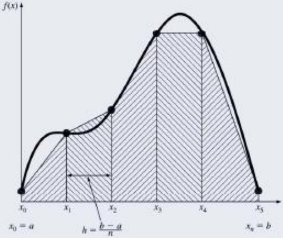
$$+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)$$

$$\int_0^3 s ds = \frac{9}{2}; \int_0^3 s(s-1)ds = \frac{9}{2}; \int_0^3 s(s-1)(s-2)ds = \frac{9}{4}$$

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x)dx = h\int_0^3 P_3(s)ds = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

REGLA DEL TRAPECIO COMPUESTO

- Asumiendo *n*+1 puntos igualmente espaciados, se tendrá n subintervalos a integrar.
- La integral total pueden ser calculado integrando cada subintervalo para luego sumarlo.



$$I=\int_{x_0}^{x_n} f_n(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} f_n(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} f_n(x)\,dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(x)\,dx$$

$$I=(x_1-x_0)\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+(x_2-x_1)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\cdots+(x_n-x_{n-1})\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

$$I=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right]$$

REGLA DEL TRAPECIO COMPUESTO

- Compuesta

$$I_T[h] = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

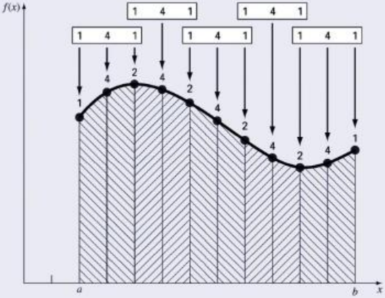
- Error

$$\boxed{E_T = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]}$$

- Exacta para funciones de 1^{er} grado

Regla del Simpson Compuesto

La regla de Simpson 1/3 puede ser utilizado en un conjunto de subintervalos de la misma manera que la regla trapezoidal, excepto que debe haber un número impar de puntos.



$$I=\int_{x_0}^{x_n} f_n(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_2} f_n(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_4} f_n(x)\,dx+\cdots+\int_{x_{n-2}}^{x_n} f_n(x)\,dx$$

$$I=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]+\frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]+\cdots+\frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$I=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{\substack{i=1\\ i,\ \mathrm{odd}}}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{\substack{j=2\\ j,\ \mathrm{even}}}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)\right]$$

Regla del Simpson Compuesto

- Compuesta

$$\boxed{I_S[h] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)}$$

- Error

$$\boxed{E_S = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{IV}(\xi), \quad \xi \in [a, b]}$$

- Exacta para polinomios de 3^er^ grado

Teorema de Valor Intermedio

Teorema

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea g una función integrable ***que no cambia de signo*** *en el intervalo $[a,b]$. Existe un número ξ entre a y b tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x) = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Regresar

Teorema de Valor Intermedio

Teorema

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y sea g una función integrable ***que no cambia de signo*** *en el intervalo $[a, b]$. Existe un número ξ entre a y b tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x) = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Regresar

Cuadratura Gaussiana

- Veremos en esta clase la Regla de la Fórmula de Cuadratura de Gauss.
- Las Fórmulas de Newton-Cotes integran polinomios interpolantes
- La Fórmula Cuadratura de Gauss integra exactamente polinomios de grado $< 2n+2$
- Como los métodos de Newton - Cotes escribimos una integral como

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n)$$

donde los coeficientes A_i y los puntos x_i para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ deben ser determinados de modo de obtener la mejor precisión posible.

Característica: Partición no regular

Cuadratura Gaussiana para 2 puntos

$$I = \int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

Por simplicidad tomemos el intervalo $[-1, 1]$. Note que siempre es posible pasar del intervalo:

$$[a, b] \longrightarrow [-1, 1]$$

a través de la transformación:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}(b-a)t + \dfrac{1}{2}(b+a) \quad \text{para} \quad t \in [-1, 1] \\ dx = x'(t)dt = \dfrac{1}{2}(b-a)dt \end{cases}$$

Cuadratura Gaussiana para 2 puntos

Luego:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x(t))x'(t)dt = \int_{-1}^{1} F(t)dt$$

donde:

$$F(t) = \frac{1}{2}(b-a)f\left(\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)\right)$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1} F(t)dt = A_0F(t_0) + A_1F(t_1)$$

donde los parametros A_0, A_1, t_0, t_1 deben ser determinados de modo que la integral es exacta para polinomios de grado menor o igual a 3.

Cuadratura Gaussiana para 2 puntos

Considerando:

$$F_0(t) = 1,\ F_1(t) = t,\ F_2(t) = t^2,\ F_3(t) = t^3$$

Podemos determinar las incognitas

$$A_0, A_1, t_0, t_1$$

A través de

$$I = \int_{-1}^{1} t^k dt = A_0 t_0^k + A_1 t_1^k \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Que genera un sistema lineal 4×4. Veamos:

Cuadratura Gaussiana para 2 puntos

Obtenemos el sistema

$$k = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} t^0 dt = A_0 t_0^0 + A_1 t_1^0 \Rightarrow A_0 + A_1 = 2$$

$$k = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} t^1 dt = A_0 t_0^1 + A_1 t_1^1 = 0$$

$$k = 2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} t^2 dt = A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 = 2/3$$

$$k = 3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} t^3 dt = A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3 = 0$$

Resolviendo el sistema, obtenemos

$$A_0 = A_1 = 1 \quad t_0 = -t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Cuadratura Gaussiana para 2 puntos

De modo que podemos escribir la Fórmula de Cuadratura Gaussiana, que es exacta para polinomios de grado menores o iguales a 3

$$I_{Gauss} = \int_{-1}^{1} F(t)dt = F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Cuadratura Gaussiana para 3 puntos

Para 3 puntos, la fórmula de cuadratura gaussiana es exacta para polinomios de grado menores e iguales a 5. Entonces,

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)dt = A_0F(t_0) + A_1F(t_1) + A_2F(t_2)$$

Considerando:

$$F_0(t) = 1,\ F_1(t) = t,\ F_2(t) = t^2,\ F_3(t) = t^3\ F_4(t) = t^4$$

$$I_{Gauss} = \int_{-1}^{1} F(t)dt = \frac{5}{9}F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}F(0) + \frac{5}{9}F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Polinomios de Legendre

Resulta que las t_i para unas n dadas son las raíces del polinomio de Legendre de grado n. Los polinomios de Legendre se definen en forma recurrente:

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

$$\text{con} \quad L_0(x) = 1, \qquad L_1(x) = x$$

Entonces $L_2(x)$ es

$$n = 1; \qquad L_2(x) = \frac{3xL_1(x) - (1)L_0(x)}{2} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

cuyos ceros son $\pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0{,}5773$,precisamente son los valores de t para la fórmula de dos términos.

En la tabla siguiente se enumeran los ceros de los polinomios de Legendre para $n = 2, 3, 4, 5$

n	Raíces	Coeficientes
2	-0.57735027	1
	0.57735027	1
3	-0.77459667	0.55555555
	0.0	0.88888889
	0.77459667	0.55555555
4	-0.86113631	0.34785485
	-0.33998104	0.65214515
	0.33998104	0.65214515
	0.86113631	0.34785485
5	-0.90617975	0.23692689
	-0.53846931	0.47862867
	0.0	0.56888889
	0.53846931	0.47862867
	0.90617975	0.23692689

EJEMPLOS

Ejemplo

Calcule $I = \int_1^3 3e^x dx$ *utilizando cuadratura gaussiana para 2 y 3 puntos.*

Solución:
Tenemos $f(x) = 3e^x$ en el intervalo $[1,3]$. Haciendo el cambio de variable

$$x(t) = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a) = t + 2$$

Para $x \in [1,3]$ tenemos $t \in [-1,1]$
$\Rightarrow dx = x'(t)dt = 1\,dt$ y $F(t) = 3e^{t+2}$

$$\text{Exacto}: \quad I = \int_1^3 3e^x \, dx = 52.1018$$

$$\text{n} = 2: \int_1^3 3e^x \, dx \approx I_{Gauss} = \int_{-1}^1 F(t)\, dt = F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= 3\, e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+2\right)} + 3\, e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+2\right)} = 51.9309$$

$$\text{n} = 3: \int_1^3 3e^x \, dx \approx I_{Gauss} = \int_{-1}^1 F(t)\, dt = \frac{5}{9}F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}F(0) + \frac{5}{9}F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) =$$

$$= 3\,\frac{5}{9}e^{\left(-\sqrt{3/5}+2\right)} + 3\,\frac{8}{9}e^2 + 3\,\frac{5}{9}e^{\left(\sqrt{3/5}+2\right)} = 52.1004$$

Ejercicio

Calcule $I = \int_2^{10} e^{-x}dx$ *utilizando cuadratura gaussiana para 2 puntos.*

MÉTODO DE ROMBERG

El Método de Romberg utiliza la Regla del Trapecio compuesto para obtener aproximaciones preliminares y enseguida aplicar un proceso de extrapolación de Richardson para mejorar la aproximación.

Metodo de Romberg= Trapecio Compuesto + Extrapolación de Richardson

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

La extrapolación de Richardson siempre es utilizada para generar resultados de alta precisión, cuando se usan fórmulas de Newton-Cotes de menor grado.

Los primeros pasos del procedimento de Romberg es obtener las aproximaciones por la Regla del trapecio compuesto para

$$m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 4, \ldots\ m_n = 2^{n-1} \quad \text{donde } n \in \mathbb{N}$$

RECORDANDO LA REGLA DEL TRAPECIO COMPUESTO

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$$

donde $\xi \in \langle a, b\rangle,\ h = (b-a)/m$ y $x_i = a + ih$ con $i = 1, 2, \ldots, m$

La regla del trapecio compuesto con la notación

$$h_k = \frac{b-a}{m_k} = \frac{b-a}{2^{k-1}} \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots$$

En esta notación, la regla del trapecio compuesto se escribe como

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h_k}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$$

donde $\xi \in \langle a, b \rangle$

Introducimos la notación R_{k1}

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}\left[f(a) + f(b)\right] = \frac{(b-a)}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}\left[f(a) + f(b) + 2f(a+h_2)\right] =$$

$$= \frac{(b-a)}{4}\left[f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h_1\, f(a+h_2)\right]$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + h_2\left\{f(a+h_3) + f(a+3h_3)\right\}\right]$$

Tenemos la aproximación de la regla del trapecio

$$R_{k1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i-1)h_k)\right] \qquad k = 2, 3, \ldots, n$$

Comentario: estamos en el paso 1 del Método de Romberg calculando aproximaciones preliminares via Regla del trapecio.

Ejemplo

Utilice la Regla del Trapecio Compuesto para realizar los primeros pasos del esquema de la integración de Romberg para obtener una aproximación de la integral

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx$$

Para $k = 1, 2, \ldots, 6.$

tenemos:

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}\left[sen\ 0 + sen\ \pi\right] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + \pi\, sen\ (\pi/2)\right] = 1.57079633$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + (\pi/2)\{sen\ (\pi/4) + sen\ (3\pi/4)\}\right]$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}\left[R_{3,1} + (\pi/4)\{sen\ (\pi/8) + sen\ (3\pi/8) + sen\ (5\pi/8) + sen\ (7\pi/8)\}\right]$$

$R_{5,1} = 1.99357034$ e $R_{6,1} = 1.99839336$

Como el resultado exacto de la integral es

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx = 2$$

la convergencia es bastante lenta!
Utilizaremos a extrapolación de Richardson para acelerar la convergencia.

Extrapolación de Richardson

La extrapolación de Richardson es:

$$R_{k,2} = \left[\frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}\right]$$

Continuando el procedimento:

$$R_{k,j} = \left[\frac{4^{j-1}R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}\right]$$

generamos la tabla de Romberg

tenemos:

$R_{1,1}$					
$R_{2,1}$	$R_{2,2}$				
$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	....	$R_{n,n}$

EJEMPLO

Aplicando en el ejemplo $\int_0^{\pi} sen\, x\, dx$

0.0					
1.57079633	2.09439511				
1.89611890	2.00455976	1.99857073			
1.97423160	2.00026917	1.99998313	2.00000555		
1.99357034	2.00001659	1.99999975	2.00000001	1.99999999	
1.99839336	2.00000103	2.0000000	2.0000000	2.0000000	2.0000000