Ecuaciones Diferenciales Parciales

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Mecanica
Universidad Nacional de Ingenieria

Métodos Numéricos

Contenido

Varios problemas en física e ingeniería tienen mas de una variable independiente. Estos problemas pueden ser modelados solamente con ecuaciones diferenciales parciales. Una ecuación diferencial que envuelva derivadas parciales es conocida como una ecuación diferencial parcial. La predicción numérica es una de las mas conocidas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales.

Clasificación

Una ecuación diferencial parcial de la forma

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u, u_x, u_y)$$

Donde A, B y C constantes.

$B^2 - 4AC$	Categoría	Ejemplo
< 0	Elíptica	Ecuación de Laplace (en estado estable con dos dimensiones espaciales) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabólica	Ecuación de conducción del calor (variable de tiempo con una dimensión espacial) $\frac{\partial T}{\partial t} = k' \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
> 0	Hiperbólica	Ecuación de onda (variable de tiempo con una dimensión espacial) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Ecuación Diferencial Parcial Eliptica

Podemos citar a la ecuación de poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = g(x, y) \qquad (1)$$

o de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Método Explicito

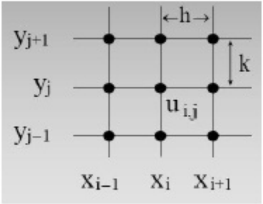
Para la ecuación (1) aproximaremos la segunda derivada a través de la fórmula de diferencia finita central

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

donde h y k son los espaciamientos en las direcciones de x e y, Reemplazando en (1), obtenemos:

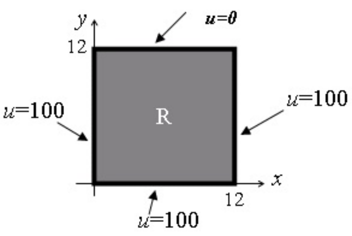
$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = g(x, y)$$



Estas ecuaciones, con las condiciones de frontera dan un sistema lineal con $(n-1)(m-1)$ incógnitas. Este sistema podría ser resuelto por eliminación Gaussiana (u otros métodos directos) o métodos iterativos como Gauss-Seidel

Ejemplo

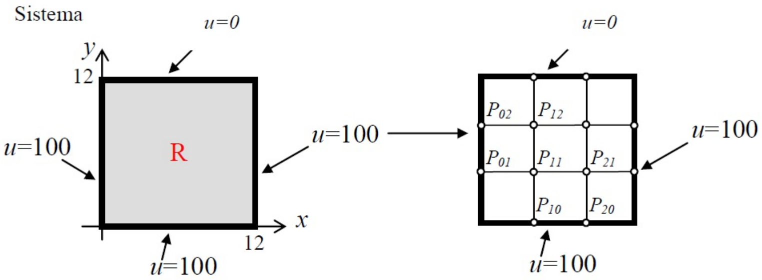
Una placa de 12 cm de lado tiene sus borde mantenidos a las temperaturas mostradas en la figura. Se desea saber la distribución de temperatura en el interior de la placa. Se escogerá un espaciamiento de h=4cm.



La ecuación de transferencia de calor en estado estacionario se reduce a Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Plantee el sistema lineal en los nodos pedidos.


Sistema
u=0
y
12
u=100
R
u=100
x
12
u=100
u=0
P02
P12
P01
P11
P21
P10
P20
u=100
u=100

Nodo P_{11} $100+ P_{12}+ P_{21}+100-4 P_{11}=0$ Nodo P_{21} $P_{11}+ P_{13} +100+100-4 P_{21}=0$ Nodo P_{12} $100+0+ P_{13}+P_{11}-4 P_{12}=0$ Nodo P_{13} $0+ P_{12}+100+P_{21}-4 P_{13}=0$	$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{12} \\ P_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -200 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$