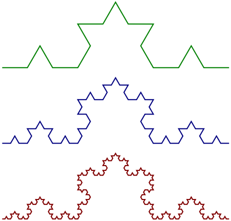
Problema de Valor de Frontera

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Mecanica
Universidad Nacional de Ingenieria



Métodos Numérico

Contenido

Problema de Valor de Frontera

Sea el problema de valor de frontera en una EDO de segundo orden

$$u'' = g(t, u, u')$$
$$u(t_0) = u_0$$
$$u(b) = B$$

Consiste en transformar el problema de valor de frontera en un problema de valor inicial, suponiendo una pendiente s, luego se desarrolla con un método numérico para encontrar $u_N(s)$, se compara con B, si estos valores no son aproximados se sigue suponiendo pendientes hasta dar al blanco B.

Problema de Valor Inicial resultante

$$u'' = g(t, u, u')$$

$$u(t_0) = u_0$$

$$u'(t_0) \approx s$$

Algoritmo del Disparo

- Elija un valor inicial de $s = s_0 = \dfrac{\Delta u}{\Delta t} = \dfrac{B - u_0}{b - t_0}$
- Elija $h = \dfrac{b - t_0}{N}$ y los puntos $t_j = t_0 + jh$
- Elija un método numérico para solucionar la E.D.O (por ejemplo RK de orden 4) al obtener $u_N = u_N(s_0)$ compárelo con $u(b)$
- Elija un segundo valor para $s = s_1$

$$s_1 = s_0 + \frac{B - u_N}{b - t_0}$$

Luego se aplica un método numérico para obtener $u_N(s_1)$

Continuación...

- Utilice interpolación lineal a fin de obtener elecciones subsecuentes valores para s, esto es:

$$s_{k+2} = s_k + (s_{k+1} - s_k)\frac{B - u_N(s_k)}{u_N(s_{k+1}) - u_N(s_k)}$$

  Con cada s_k resolvemos el problema de valor inicial y comparamos $u_N(s_k)$ con B.

- Deténgase cuando $|u_N(s_k) - B|$ sea suficientemente pequeño (Criterio de Convergencia)

EJEMPLO

Ejemplo

Resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} + e^{xy}\frac{dy}{dx} + y^2x = 0$$

Con condiciones de frontera:

$$y(0) = 0$$

$$y(0{,}5) = 1$$

SOLUCIÓN

Haciendo el cambio de variable

$$u_1 = y; \qquad u_2 = y'$$

Convirtiendo la EDO en un sistema EDO's de primer orden, con sus respectivas condiciones inicales:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -e^{tu_1}u_2 - tu_1^2 \\ u_1(0) = 0 \\ u_2(0) = s_0 \approx = \dfrac{1-0}{0{,}5-0} = 2 \end{cases}$$

Considerando $h = 0{,}1$ y aplicando RK2, tenemos la siguiente tabla

x	y	y'
0.0	0	2.0000 -- (S_0)
0.1	0.1900	1.8080
0.2	0.3616	1.6269
0.3	0.5154	1.4492
0.4	0.6514	1.2691
0.5	0.7693	1.0829
	$Y_5(S_0)$	

Estimando otra pendiente:

$$S_1 = 2 + \frac{1 - 0{,}7693}{0{,}5 - 0} = 2{,}46$$

x	y	y'
0.0	0	$\boxed{2.4600 \quad S_1}$
0.1	0.2337	2.2232
0.2	0.4446	1.9978
0.3	0.6333	1.7727
0.4	0.7992	1.5395
0.5	$\boxed{0.9413}$	1.2932
	$Y_5(S_1)$	

Interpolando

$$s_2 = s_0 + (s_1 - s_0)\frac{B - Y_5(s_0)}{Y_5(s_1) - Y_5(s_0)} = 2{,}617$$

x	y	y'
0.0	0	$\boxed{2.6170}$ S_2
0.1	0.2486	2.3649
0.2	0.4730	2.1241
0.3	0.6735	1.8823
0.4	0.8495	1.6298
0.5	$\boxed{0.9996}$	1.3615
	$Y_5(S_2)$	

Interpolando

$$s_3 = s_1 + (s_2 - s_1)\frac{B - Y_5(s_1)}{Y_5(s_2) - Y_5(s_1)} = 2{,}618$$

x	y	y'
0.0	0	$\boxed{2.6180 \quad S_3}$
0.1	0.2487	2.3658
0.2	0.4731	2.1249
0.3	0.6737	1.8830
0.4	0.8498	1.6304
0.5	$\boxed{1.0000}$	1.3619
	$Y_5(S_3)$	

Error:

$$|B - Y_5(S_3)| = 0$$

MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

Dado la ecuación diferencial de segundo orden con valor de frontera

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = r(t) \qquad a = t_0 \leq t \leq b$$

$$u(a) = \alpha \qquad u(b) = \beta$$

se requiere aproximar $u', \; u''$ usando diferencias centrales.
Se elije $h = \dfrac{b - t_0}{N}$ y los puntos $t_j = t_0 + jh$
Esto nos lleva a formar un sistema lineal de orden $N \times N$, que será resuelto con algún método numérico.
En los puntos interiores de la retícula t_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, la ecuación diferenciar a aproximar es:

$$u''(t_i) = p(t_i)u'(t_i) + q(t_i)u(t_i) + r(t_i) \qquad (1)$$

Sabemos que:

$$u''(t_i) \approx \frac{u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})}{h^2}$$

$$u'(t_i) \approx \frac{u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})}{2h}$$

Resultando:

$$\frac{u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})}{h^2} = p(t_i)\frac{u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})}{2h} + q(t_i)u(t_i) + r(t_i) \qquad (2)$$

en la frontera:

$$u(a) = \alpha \qquad u(b) = \beta$$

Definiendo:

$$w_0 = \alpha \qquad w_{N+1} = \beta$$

la ec(2) queda:

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = p(t_i)\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q(t_i)w_i + r(t_i) \tag{3}$$

La ec (3) se puede escribir como:

$$\left(1 + \frac{h}{2}p(t_i)\right)w_{i-1} + \left(-h^2 q(t_i) - 2\right)w_i + \left(1 - \frac{h}{2}p(t_i)\right)w_{i+1} = h^2 r(t_i)$$

Haciendo:

$$A_i = \left(1 + \frac{h}{2}p(t_i)\right)$$

$$B_i = \left(-h^2 q(t_i) - 2\right)$$

$$C_i = \left(1 - \frac{h}{2}p(t_i)\right)$$

$$D_i = h^2 r(t_i)$$

Obteniendo el sistema matricial

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & \cdots & & A_N & B_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - A_1 w_o \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{N-1} \\ D_N - C_N w_{N+1} \end{bmatrix}$$

La solución del sistema lineal, se puede realizar por la reducción de Crout.

EJEMPLO

Ejemplo

Resolver

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Con condiciones de frontera

$$y(0) = 0{,}1 \qquad y(0{,}5) = 0{,}283$$

Considere $h = 0{,}1$

Solución

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

$p(x_i) = 1$
$q(x_i) = 2$
$r(x_i) = 0$

$$A_i = \left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right) = 1{,}05$$

$$B_i = -\left(h^2 q(x_i) + 2\right) = -2{,}02$$

$$C_i = \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right) = 0{,}95$$

$$D_i = h^2 r(x_i) = 0$$

Resolviendo el sistema tridiagonal

$$\begin{bmatrix} -2{,}02 & 0{,}95 & 0 & 0 \\ 1{,}05 & -2{,}02 & 0{,}95 & 0 \\ 0 & 1{,}05 & -2{,}02 & 0{,}95 \\ 0 & 0 & 1{,}05 & -2{,}02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}105 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}26885 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1238 \\ 0{,}1527 \\ 0{,}1879 \\ 0{,}2308 \end{bmatrix}$$