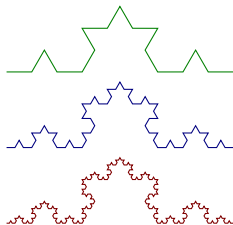


Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica



Métodos Numérico

Agenda



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Una Ecuación Diferencial es una expresión matemática que involucra al menos una derivada de una función desconocida de una o más variables.

Ecuación diferencial ordinaria: Cuando la función desconocida depende de una sola variable.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y$$

Ecuación diferencial parcial: cuando la función desconocida depende de más de una variable.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V$$

Introducción

3

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



El **orden** de una ecuación diferencial lo define el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y \quad \text{Es de primer orden}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 15x = 0 \quad \text{Es de segundo orden}$$

El **grado** de una ecuación diferencial lo define el exponente de la derivada de mayor orden, una vez que se han eliminado las fracciones y los radicales en variable dependiente y en sus derivadas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 15x = 0 \quad \text{Es de primer grado}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y - x = 0 \quad \text{Es de segundo grado}$$

4

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Aquí se presentan algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales con sus soluciones. En cada caso, t es la variable independiente e y la variable dependiente. Por tanto, y es el nombre de la función desconocida de la variable independiente t :

Ecuación:

$$y' - y = e^t$$
$$y'' + 9y = e^t$$
$$y' + \frac{1}{2x} = 0$$

Solución:

$$y(t) = te^t + ce^t$$
$$y(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t)$$
$$y(t) = \sqrt{c - t}$$

5

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Forma estándar del **Problema de Valor Inicial** para una ecuación diferencial de primer orden

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) \text{ está dada} \end{cases}$$

Se llama Problema de Valor Inicial (PVI) porque t se puede interpretar como el tiempo y $t = a$ se puede pensar como el instante inicial en el tiempo.

Ecuación:

$$y' = y + 1$$

$$y' = 6t - 1$$

$$y' = \frac{t}{y + 1}$$

Valor inicial

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 6$$

$$y(0) = 0$$

Solución

$$y(t) = e^t - 1$$

$$y(t) = 3t^2 - t + 4$$

$$y(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} - 1$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales

6 Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso

Metodo de Euler

Metodo de Taylor

Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Definición

Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, un intervalo $[t_0, T]$ y un valor $y_0 \in \mathbb{R}$, el problema de valor inicial consiste en determinar una función $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique una ecuación diferencial de primer orden

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T]$$

con la condición inicial

$$y(t_0) = y_0$$

Nota: Antes de empezar a resolver el problema, interesa garantizar que esta tiene solución única.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

7

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

- ▶ f es continua en $[t_0, T]$ con respecto al primer argumento.
- ▶ f es continua según Lipschitz con respecto al segundo argumento, esto es, existe una constante $L > 0$ (llamada constante de Lipschitz) tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall t \in [t_0, T], \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

Entonces, el problema de valor inicial posee una solución y que es única. Además, la solución y es continuamente diferenciable en $[t_0, T]$.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales

8

Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso

Metodo de Euler

Metodo de Taylor

Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Ejemplo

Demostrar que el Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y + t^2 e^t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

tiene solución única en el intervalo [1, 2].

Solución:

$f(t, y) = \frac{2}{t}y + t^2 e^t$ continua en su dominio, y como

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{2}{t} \right| |y_1 - y_2| \leq 2 |y_1 - y_2|$$

Donde la constante de Lipschitz $L = 2$, luego se verifica que tiene solución única.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Pasos:

1. Definir una malla $\{t_i\}$ $i = 0, 1, \dots, N$ en el intervalo $[t_0, T]$;
2. Desde $i = 1$ hasta $i = N$, determinar los y_i que será el valor de la solución aproximada de $y(t_i)$.

El y_0 es la condición inicial conocida. Los métodos numéricos se distinguen por la forma como son calculados los valores sucesivos de y_i .

Los métodos en donde el cálculo de y_i es realizado solo con la información en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ se llaman **métodos de un solo paso**. Los que recurren a información fuera de este intervalo para determinar y_i se llaman **métodos de múltiple paso**, o de paso múltiple.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

10 Métodos de un Solo Paso

Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Método de Euler

Este método rara vez se usa en la práctica, debido a que es el menos preciso de los métodos que veremos. Sin embargo su derivación es tan simple que permite ilustrar las técnicas que normalmente se utilizan en la construcción de métodos más avanzados. Pretendemos resolver

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t_0 = a \leq t \leq b \\ y(t_0) = y_0 & \text{Condición Inicial} \end{cases}$$

Tomamos el tamaño de paso $h > 0$ ($h = (b - a)/n$) definiendo $t_j = t_0 + jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ y obtenemos de tal manera

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j) \quad j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

siendo los y_j aproximaciones para $y(t_j)$

Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso

11

Método de Euler

Método de Taylor

Método de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden
superior

EDO de orden superior

Universidad Nacional de
Ingeniería
Facultad de Ingeniería
Mecánica



Ejemplo

Aplicar el método de Euler para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = -y + t + 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solución:

El primer paso, es encontrar el tamaño de paso h , eligiendo

$$n = 10$$
$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.1 * f(0, 1) = 1$$

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + 0.1 * f(1, 1) = 1.01$$

⋮

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso

12

Método de Euler

Método de Taylor
Método de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



La solución exacta es $y(t) = t + e^{-t}$. La siguiente tabla muestra la comparación entre los valores aproximados y_j y los valores exactos $y(t_j)$.

t_j	y_j	$y(t_j)$	Error= $ y_j - y(t_j) $
0.0	1.000000	1.000000	0.0
0.1	1.000000	1.004837	0.004837
0.2	1.010000	1.018731	0.008731
0.3	1.029000	1.040818	0.011818
0.4	1.056000	1.070320	0.014220
0.5	1.090000	1.106531	0.016041
0.6	1.131441	1.148812	0.017371
0.7	1.178297	1.196585	0.018288
0.8	1.230467	1.249329	0.018862
0.9	1.287420	1.306570	0.019150
1.0	1.348678	1.367879	0.019201

Nótese que el error crece ligeramente conforme el valor de t_j aumenta

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso

13

Metodo de Euler

Metodo de Taylor

Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

Método de Taylor de Orden Superior



Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Podemos desarrollar la función $y(t)$ en una serie de Taylor alrededor del punto t_j de manera de poder encontrar $y(t_{j+1})$

$$y(t) = y(t_j) + hy'(t_j) + \frac{1}{2}h^2y''(t_j) + \dots \quad \text{donde } h = t_{j+1} - t_j$$

El método de Euler consiste en truncar esta serie al primer orden.

Si truncamos la serie de Taylor al orden n tenemos el **método de Taylor de orden n**

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j) + \frac{h^2}{2}f'(t_j, y_j) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n-1)}(t_j, y_j)$$

Los métodos de Taylor de orden elevado no son en general de aplicación muy práctica, utilizaremos en muchos casos solo el **método de Taylor de orden 2**.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler

14

Método de Taylor

Método de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

Método de Taylor de Orden 2



Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

PVI

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t_0 = a \leq t \leq b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{Condición Inicial}$$

Tomamos el tamaño de paso $h > 0$ ($h = (b - a)/n$)
definiendo $t_j = t_0 + jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$
y obtenemos de tal manera

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j) + \frac{h^2}{2} f'(t_j, y_j) \quad j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler

15

Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Ejemplo

Aplicar el método de Taylor de Orden 2 para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = -y + t + 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Considere $h = 0.1$

Solución:

$$f(t, y) = -y + t + 1$$

$$f'(t, y) = -y' + 1 = y - t - 1 + 1 = y - t$$

$$\text{Luego: } y_1 = y_0 + h(-y_0 + t_0 + 1) + \frac{h^2}{2}(y_0 - t_0) = 1.005$$

$$y_2 = 1.019025$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler

16

Metodo de Taylor

Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

t_j	y_j
0.0	1.000000
0.1	1.005000
0.2	1.019025
0.3	1.041218
0.4	1.070802
0.5	1.107076
0.6	1.149404
0.7	1.197211
0.8	1.249976
0.9	1.307228
1.0	1.368541

17

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

41

Método de Runge Kutta



Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Los métodos de Taylor esbozados en la sección anterior tienen la desventaja de requerir el cálculo y la evaluación de las derivadas de $f(t, y)$. Este puede ser un procedimiento muy complicado y que consume mucho tiempo para una gran cantidad de problemas. Es por ello que los métodos de Taylor se usan muy poco en la práctica. Los **métodos de Runge Kutta** eliminan el cálculo y la evaluación de las derivadas de $f(t, y)$.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

18

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

Método de Runge Kutta de Orden 2



Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Conocido También como el método de Heun ó Euler
Mejorado

PVI

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t_0 = a \leq t \leq b \\ y(t_0) = y_0 & \text{Condición Inicial} \end{cases}$$

Tomamos el tamaño de paso $h > 0$ ($h = (b - a)/n$)
definiendo $t_j = t_0 + jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$
y obtenemos de tal manera

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_j, y_j) \\ k_2 &= hf(t_{j+1}, y_j + k_1) \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

19

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden
superior

EDO de orden superior

Universidad Nacional de
Ingeniería
Facultad de Ingeniería
Mecánica

41



Ejemplo

Aplicar el método de Runge Kutta de Orden 2 para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = -y + t^2 + 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Considere $h = 0.1$

Solución:

$$f(t, y) = -y + t + 1$$

$$k_1 = hf(t_j, y_j) = h(-y_j + t_j^2 + 1)$$

$$k_2 = hf(t_{j+1}, y_j + k_1) = h[-(y_j + k_1) + t_{j+1}^2 + 1]$$

$$\text{Luego: } k_1 = hf(t_0, y_0) = h(-y_0 + t_0^2 + 1) = 0$$

$$k_2 = hf(t_1, y_0 + k_1) = h[-(y_0 + k_1) + t_1^2 + 1] = 0.001$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1.0005$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor

20 Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes Pantoja C.

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

t_j	y_j
0.0	1.000000
0.1	1.000500
0.2	1.002903
0.3	1.008927
0.4	1.020129
0.5	1.037917
0.6	1.063565
0.7	1.098226
0.8	1.142944
0.9	1.198665
1.0	1.266242

21

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

41

Método de Runge Kutta de Orden 4



Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Este es el método más empleado en la práctica. Surge de aproximar la integral de $f(t, y)$ por la regla de Simpson 1/3

PVI

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t_0 = a \leq t \leq b \\ y(t_0) = y_0 & \text{Condición Inicial} \end{cases}$$

Tomamos el tamaño de paso $h > 0$ ($h = (b - a)/n$) definiendo $t_j = t_0 + jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$; obtenemos de tal manera

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_j, y_j) \\ k_2 &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(t_j + h, y_j + k_3) \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor

22 Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden
superior

EDO de orden superior

Universidad Nacional de
Ingeniería
Facultad de Ingeniería
Mecánica



Ejemplo

Aplicar el método de Runge Kutta de orden 4 para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = -y + t + 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Considere $h = 0.1$

Solución:

$$f(t, y) = -y + t + 1$$

$$k_1 = hf(t_j, y_j) = h(-y_j + t_j + 1)$$

$$k_2 = hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right) = h\left(-\left(y_j + \frac{k_1}{2}\right) + \left(t_j + \frac{h}{2}\right) + 1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right) = h\left(-\left(y_j + \frac{k_2}{2}\right) + \left(t_j + \frac{h}{2}\right) + 1\right)$$

$$k_4 = hf(t_j + h, y_j + k_3) = h(-y_j + k_3 + (t_j + h) + 1)$$

23

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor

Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

41



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes Pantoja C.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

24

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

Luego:

$$f(t, y) = -y + t + 1$$

$$k_1 = hf(t_0, y_0) = h(-y_0 + t_0 + 1) = 0$$

$$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) =$$

$$h\left(-\left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right) + \left(t_0 + \frac{h}{2}\right) + 1\right) = 0.005$$

$$k_3 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) =$$

$$h\left(-\left(y_0 + \frac{k_2}{2}\right) + \left(t_0 + \frac{h}{2}\right) + 1\right) = 0.00475$$

$$k_4 = hf(t_0 + h, y_0 + k_3) = h(-y_0 + k_3 + (t_0 + h) + 1) = 0.009525$$

Finalmente:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 1.00483750$$

41



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

t_j	y_j
0.0	1.000000
0.1	1.00483750
0.2	1.01873090
0.3	1.04081842
0.4	1.07032028
0.5	1.10653093
0.6	1.14881193
0.7	1.19658561
0.8	1.24932928
0.9	1.30656999
1.0	1.36787977

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

25

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

41

Sistema de Ecuaciones Diferenciales



Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Dadas las funciones f_1, f_2, \dots, f_n de \mathbb{R}^{n+1} en \mathbb{R} , un sistema de ecuaciones diferenciales de orden 1 definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \\ \frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} = f_n(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \end{array} \right.$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Método de Euler
Método de Taylor
Método de Runge Kutta

Sistema EDO

26 Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



El PVI consiste en determinar las funciones u_1, u_2, \dots, u_n en un intervalo $[a, b]$ que satisfacen estas ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales:

$$u_1(a) = u_{1,0} \quad u_2(a) = u_{2,0} \quad u_n(a) = u_{n,0}$$

Matricialmente:

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$$

$\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ y \mathbf{u} es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n donde $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$.

Condición inicial:

$$\mathbf{u}(a) = \mathbf{0}$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

27

41

Método de Euler



Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Los métodos numéricos aplicados a EDO de valor inicial pueden ser aplicados de forma inmediata para el caso matricial (sistemas de ecuaciones).

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + h\mathbf{F}_h(t_i, \mathbf{u}_i)$$

Escogemos un entero $N > 0$ y tomamos $h = (b - a)/N$ para dividir el intervalo $[a, b]$ en N sub-intervalos con puntos de red

$$t_j = a + jh \quad j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

La función \mathbf{F}_h se define en términos de \mathbf{f} , de manera análoga al caso escalar.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Método de Euler
Método de Taylor
Método de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

28

41

Ejemplo



Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Considere el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_1' &= u_1 u_2 \\ u_2' &= t + u_1 - u_2 \end{cases}$$

$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0), \quad t \in [0, 1]$$

1. Determinar una solución aproximada por el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.1$.
2. Determinar una solución aproximada por el método de Taylor de orden 2 con tamaño de paso $h = 0.1$.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

29

41



Se define f_1 y f_2 por

$$\begin{cases} f_1(t, u_1, u_2) = u_1 u_2 \\ f_2(t, u_1, u_2) = t + u_1 - u_2 \end{cases}$$

1. La expresión del método de Euler es

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + hF_h(t_i, \mathbf{u}_i)$$

Toma en este caso la forma

$$\mathbf{u}_{i+1} = \begin{pmatrix} u_{1,i+1} \\ u_{2,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f_1(t_i, u_{1,i}, u_{2,i}) \\ f_2(t_i, u_{1,i}, u_{2,i}) \end{pmatrix}$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

30 Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Además:

$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + 0.1 \times u_{1,i}u_{2,i}$$

$$u_{2,i+1} = u_{2,i} + 0.1 \times (t_i + u_{1,i} - u_{2,i})$$

Para $i = 0, 1, 2, \dots, 9$ con las condiciones iniciales

$$u_{1,0} = u_1(0) = 1$$

$$u_{2,0} = u_2(0) = 0$$

La tabla siguiente representa los valores obtenidos:

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

31 Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes Pantoja C.

t_i	$u_{1,i}$	$u_{2,i}$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	1.0000	0.1000
0.2	1.0100	0.2000
0.3	1.0302	0.3010
0.4	1.0612	0.4039
0.5	1.1041	0.5096
0.6	1.1603	0.6191
0.7	1.2322	0.7332
0.8	1.3225	0.8531
0.9	1.4353	0.9801
1.0	1.5760	1.1156

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

32 Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



2 La expresión del método de Taylor de orden 2 es

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + hF_h(t_i, \mathbf{u}_i) + (h^2/2)F'_h(t_i, \mathbf{u}_i)$$

Siendo entonces necesario determinar f'_1 y f'_2 .

$$f'_1(t, u_1, u_2) = u_2 u'_1 + u_1 u'_2 = u_1 u_2^2 + u_1(t + u_1 - u_2)$$

$$f'_2(t, u_1, u_2) = 1 + u'_1 - u'_2 = 1 + u_1 u_2 - (t + u_1 - u_2)$$

Toma en este caso la forma

$$\mathbf{u}_{i+1} = \begin{pmatrix} u_{1,i+1} \\ u_{2,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f_1(t_i, u_{1,i}, u_{2,i}) \\ f_2(t_i, u_{1,i}, u_{2,i}) \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} f'_1(t_i, u_{1,i}, u_{2,i}) \\ f'_2(t_i, u_{1,i}, u_{2,i}) \end{pmatrix}$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

33 Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Además:

$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + 0.1 \times u_{1,i} u_{2,i} + 0.005 \times (u_{1,i} u_{2,i}^2 + u_{1,i} (t_i + u_{1,i} - u_{2,i}))$$

$$u_{2,i+1} = u_{2,i} + 0.1 \times (t_i + u_{1,i} - u_{2,i}) + 0.005 \times (1 + u_{1,i} u_{2,i} - (t_i + u_{1,i} - u_{2,i}))$$

Para $i = 0, 1, 2, \dots, 9$ con las condiciones iniciales

$$u_{1,0} = u_1(0) = 1$$

$$u_{2,0} = u_2(0) = 0$$

La tabla siguiente representa los valores obtenidos:

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Metodo de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

34 Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

t_i	$u_{1,i}$	$u_{2,i}$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	1.0050	0.1000
0.2	1.0202	0.2010
0.3	1.0461	0.3038
0.4	1.0838	0.4094
0.5	1.1349	0.5187
0.6	1.2016	0.6327
0.7	1.2871	0.7525
0.8	1.3955	0.8797
0.9	1.5328	1.0158
1.0	1.7073	1.1632

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

35

41

EDO de orden superior



Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

La ecuación diferencial general de orden n de la forma

$$y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad a \leq t \leq b$$

con condiciones iniciales

$$y(a) = u_{1,0}, y'(a) = u_{2,0}, \dots, y^{(n-1)}(a) = u_{n,0}$$

para

$$u_{1,0}, u_{2,0}, \dots, u_{n,0} \in \mathbb{R}$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

36

41



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes Pantoja C.

Se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden al hacer

$$y = u_1$$

$$y' = u_2$$

\vdots

$$y'_{n-1} = u_n$$

$$y'_n = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

Usando esta notación, obtenemos el sistema de primer orden

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

37

41



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

38

EDO de orden superior

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_2$$
$$\frac{du_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u_3$$

⋮

$$\frac{du_{n-1}}{dt} = \frac{dy^{(n-2)}}{dt} = u_n$$

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{dy^{(n-1)}}{dt} = y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

con condiciones iniciales

$$u_1(a) = y(a) = u_{1,0}$$

$$u_2(a) = y'(a) = u_{2,0}$$

⋮

$$u_n(a) = y^{(n-1)}(a) = u_{n,0}$$

41

Ejemplo



Ecuaciones Diferenciales Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Determinar por el método de Euler con tamaño de paso 0.05 una solución aproximada de

$$\theta'' + 10 \sin \theta = 0$$

$$\theta(0) = 0.1 \quad \theta'(0) = 0$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

39 EDO de orden superior



El primer paso, es definir

$$u_1 = \theta \quad u_2 = \theta'$$

Luego se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= \theta'' = -10 \sin \theta = -10 \sin u_1 \end{aligned}$$

Luego las expresiones de recurrencias serán

$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + 0.05 \times u_{2,i}$$

$$u_{2,i+1} = u_{2,i} - 0.05 \times 10 \sin(u_{1,i})$$

Para $i = 0, 1, 2, \dots, 9$ con las condiciones iniciales

$$u_{1,0} = u_1(0) = 0.1$$

$$u_{2,0} = u_2(0) = 0$$

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

40

41



La tabla siguiente representa los valores obtenidos:

t_i	$u_{1,i} = \theta_i$	$u_{2,i}$
0.0	0.1000	0.0000
0.05	0.1000	-0.0499
0.10	0.0975	-0.0998
0.15	0.0925	-0.1485
0.20	0.0851	-0.1947
0.25	0.0754	-0.2372
0.30	0.0635	-0.2748
0.35	0.0495	-0.3066
0.40	0.0344	-0.3314
0.45	0.0179	-0.3486
0.50	0.0094	-0.3576

Ecuaciones
Diferenciales
Ordinaria

Mg. Hermes
Pantoja C.

Introducción

Ecuaciones Diferenciales
Problema de Valor Inicial

Solución Numérica

Métodos de un Solo Paso
Metodo de Euler
Metodo de Taylor
Metodo de Runge Kutta

Sistema EDO

Sistema EDO

EDO de orden superior

EDO de orden superior

41

41