

# Spline Cúbicos

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Mecánica  
Universidad Nacional de Ingeniería

Métodos Numéricos



# Contenido

## 1 Splines



# Introducción

Un *spline* es una función polinomial definida por casos

$$S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde cada caso es un polinomio

$$S_i : [n_i, n_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$$

y  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  con lo cual queda definido de la siguiente manera:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$



# Spline Lineal

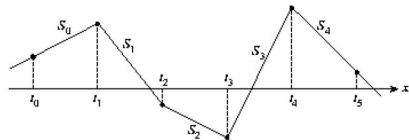
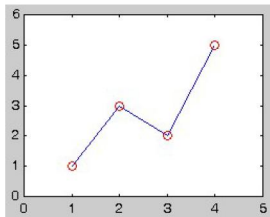
## Definición

Una función  $S(x)$  es un spline de grado 1 si:

- 1 El dominio de  $S(x)$  es un intervalo de  $[a, b]$
- 2  $S(x)$  es continua en  $[a, b]$
- 3 Hay puntos (los nodos de  $S$ )  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tal que  $S(x)$  es lineal en cada subintervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ .



Dados los  $n + 1$  puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , una función spline de grado 1 que interpole los datos es simplemente unir cada uno de los puntos mediante segmentos de recta, como se ilustra en las siguientes figuras



Spline de grado 1 con 6 puntos



Por lo tanto, el spline de grado 1 queda definido como:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = y_1 + f[x_1, x_2](x - x_1) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = y_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n](x - x_{n-1}) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$



## Ejemplo

## Ejemplo

Determine el spline lineal que interpola una tabla con los siguientes datos:

x	1	2	5	7
y	1	2	3	2,5



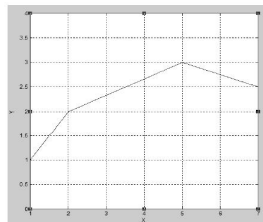
## Solución:

De acuerdo con la definición:

$$S_0(x) = 1 + \frac{2-1}{2-1}(x-1) = x; \quad x \in [1, 2]$$

$$S_1(x) = 2 + \frac{3-2}{5-2}(x-2) = \frac{1}{3}(x+4); \quad x \in [2, 5]$$

$$S_2(x) = 3 + \frac{2,5-3}{7-5}(x-5) \\ = -\frac{1}{4}(x-17); \quad x \in [5, 7]$$



# Spline Cúbico

## Definición (Spline Cúbico)

Una función  $S(x)$  es un spline de grado 3 (Spline Cúbico) si:

- 1 El dominio de  $S(x)$  es un intervalo de  $[a, b]$
- 2  $S(x)$  es continua en  $[a, b]$
- 3  $S'(x)$  es continua en  $[a, b]$
- 4  $S''(x)$  es continua en  $[a, b]$
- 5 Hay puntos (los nodos de  $S$ )  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tal que  $S(x)$  es cúbico en cada subintervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ .



# Construcción de la función Spline Cúbica

Consideremos  $n + 1$  puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  cuyas abscisas están ordenadas de manera creciente

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  (nodos).

La función  $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es un spline cúbico si existen  $n$  polinomios  $S_k(x)$ , cada uno definido sobre un intervalo, los cuales lo podemos escribir en la forma:

$$S_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$$

para  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  y  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  verificando las siguientes propiedades:



- 1  $S(x_k) = y_k$  donde  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  (condición de interpolación).
- 2  $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$  donde  $k = 0, 1, 2, \dots, n-3, n-2$  (Continuidad de los splines)
- 3  $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$  donde  $k = 0, 1, 2, \dots, n-3, n-2$  (Continuidad de la derivada)
- 4  $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$  donde  $k = 0, 1, 2, \dots, n-3, n-2$  (Continuidad de la segunda derivada)
- 5 Una de las siguientes condiciones de frontera se satisface

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \text{ frontera libre o natural}$$

$$S'(x_0) = f'(x_0) \text{ y } S'(x_n) = f'(x_n) \text{ frontera sujeta}$$

Si se satisface la condición de frontera libre o natural, se denomina spline cúbico natural.



# Implementación de los Spline Cúbicos

Los coeficientes  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  y  $d_k$  son dados por las fórmulas

$$a_k = \frac{g_{k+1} - g_k}{6h_k}$$

$$b_k = \frac{g_k}{2}$$

$$c_k = f[x_k, x_{k+1}] - \frac{2h_k g_k + g_{k+1} h_k}{6}$$

$$d_k = f(x_k)$$

donde  $h_k = x_{k+1} - x_k$   $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  los valores de  $g_k$  son obtenidos de la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:





# Spline de frontera libre o natural

Haciendo  $g_0 = g_n = 0$  (Spline cúbico natural), se reduce al siguiente sistema tridiagonal  $\tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{b}$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix}$$



## Spline de frontera sujeta

$S'_0(x_0) = A$  y  $S'_n(x_n) = B$ , con lo cual se agregan dos ecuaciones

$$2h_0g_0 + h_0g_1 = 6(f[x_0, x_1] - A)$$

$$h_{n-1}g_{n-1} + 2h_{n-1}g_n = 6(B - f[x_{n-1}, x_n])$$

Se tiene el siguiente sistema matricial

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & \\ & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$



$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} f[x_0, x_1] - A \\ f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ B - f[x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix}$$



## Ejemplo

## Ejemplo

Obtener una interpolación por **Spline Cúbico Natural** para el polinomio  $p(x) = x^4$ , para  $x = 0, 1, 2, 3$ . Muestre el spline  $S(x)$  para cada intervalo.



## Solución:

$$x_0 = 0; x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$$

$$f(x_0) = 0; f(x_1) = 1; f(x_2) = 16; f(x_3) = 81$$

$$h_0 = x_1 - x_0 = 1; h_1 = x_2 - x_1 = 1; h_2 = x_3 - x_2 = 1$$

$$f[x_0, x_1] = 1; f[x_1, x_2] = 15; f[x_2, x_3] = 65$$

$$g_0 = 0; g_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2] \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 14 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$g_1 = 2,4; \quad g_2 = 74,4$$

Hallando los coeficientes de  $S_0(x)$

$$a_0 = \frac{g_1 - g_0}{6h_0} = 0,4$$

$$b_0 = \frac{g_0}{2} = 0$$

$$c_0 = f[x_0, x_1] - \frac{2h_0g_0 + g_1h_0}{6} = 0,6$$

$$d_0 = f(x_0) = 0$$

$$S_0(x) = 0,4(x - 0)^3 + 0(x - 0)^2 + 0,6(x - 0) + 0 \quad x \in [0, 1]$$



Hallando los coeficientes de  $S_1(x)$

$$a_1 = \frac{g_2 - g_1}{6h_1} = 12$$

$$b_1 = \frac{g_1}{2} = 1,2$$

$$c_1 = f[x_1, x_2] - \frac{2h_1g_1 + g_2h_1}{6} = 1,8$$

$$d_1 = f(x_1) = 1$$

$$S_1(x) = 12(x - 1)^3 + 1,2(x - 1)^2 + 1,8(x - 1) + 1 \quad x \in [1, 2]$$



Hallando los coeficientes de  $S_2(x)$

$$a_2 = \frac{g_3 - g_2}{6h_2} = -12,4$$

$$b_2 = \frac{g_2}{2} = 37,2$$

$$c_2 = f[x_2, x_3] - \frac{2h_2g_2 + g_3h_2}{6} = 40,2$$

$$d_2 = f(x_2) = 16$$

$$S_2(x) = -12,4(x-2)^3 + 37,2(x-2)^2 + 40,2(x-2) + 16 \quad x \in [2, 3]$$



Finalmente:

$$S(x) =$$

$$\begin{cases} S_0(x) = 0,4(x - 0)^3 + 0(x - 0)^2 + 0,6(x - 0) + 0 & x \in [0, 1] \\ S_1(x) = 12(x - 1)^3 + 1,2(x - 1)^2 + 1,8(x - 1) + 1 & x \in [1, 2] \\ S_2(x) = -12,4(x - 2)^3 + 37,2(x - 2)^2 + 40,2(x - 2) + 16 & x \in [2, 3] \end{cases}$$



## Ejemplo

## Ejemplo

A partir de la función  $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$  se han tabulado los siguientes puntos:

x	f(x)
1.00	0.76578938644649
1.02	0.79536677885175
1.04	0.82268817048051
1.06	0.84752225818442

- Obtener el spline cúbico natural tomando toda la información de esta tabla.
- Estime  $f(1.01)$  y  $f'(1.02)$  haciendo uso del spline obtenido en a) y muestre los errores correspondientes.
- Comente sus resultados.



## Ejemplo

a)

<b>i</b>	<b>h<sub>i</sub></b>	<b>x</b>	<b>F(x)</b>	<b>f<sub>i</sub> , j</b>
0	0.02	1.00	0.76578938644649	1.47886962026340
1	0.02	1.02	0.79536677885175	1.36606958143797
2	0.02	1.04	0.82268817048051	1.24170438519515
		1.06	0.84752225818442	





## Ejemplo

b)

$$S(1.01) = 0.780742$$

$$f(1.01) = 0.780846$$

$$\text{err} = 0.000104$$

$$S'(1.02) = 1.435292$$

$$f'(1.02) = 1.424342$$

$$\text{err} = 0.010950$$

c)

La precisión obtenido es bastante buena para aproximacion de la función mas no asi para el calculo de la derivada.



## Ejemplo

## Ejemplo

Obtener una interpolación por **Spline Cúbico forzado** para el polinomio  $p(x) = (x - 1)^4$ , para  $x = 0, 1, 1.5$ . Muestre el spline  $S(x)$  para cada intervalo.



## Solución:

$$x_0 = 0; x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f(x_0) = 1; f(x_1) = 0; f(x_2) = \frac{1}{16}$$

$$h_0 = x_1 - x_0 = 1; h_1 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2}$$

$$f[x_0, x_1] = -1; f[x_1, x_2] = \frac{1}{8}$$

$$A = f'(0) = -4; B = f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_0, x_1] - A \\ f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ B - f[x_1, x_2] \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0,3333 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 6,75 \\ 2,25 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$g_0 = 9,75; \quad g_1 = -1,5; \quad g_2 = 3$$

Hallando los coeficientes de  $S_0(x)$

$$a_0 = \frac{g_1 - g_0}{6h_0} = -1,8750$$

$$b_0 = \frac{g_0}{2} = 4,8750$$

$$c_0 = f[x_0, x_1] - \frac{2h_0g_0 + g_1h_0}{6} = -4$$

$$d_0 = f(x_0) = 1$$

$$S_0(x) = -1,8750(x-0)^3 + 4,8750(x-0)^2 + -4(x-0) + 1 \quad x \in [0, 1]$$



Hallando los coeficientes de  $S_1(x)$

$$a_1 = \frac{g_2 - g_1}{6h_1} = 1,5$$

$$b_1 = \frac{g_1}{2} = -0,75$$

$$c_1 = f[x_1, x_2] - \frac{2h_1g_1 + g_2h_1}{6} = 0,125$$

$$d_1 = f(x_1) = 0$$

$$S_1(x) = 1,5(x-1)^3 + -0,75(x-1)^2 + 0,125(x-1) + 0 \quad x \in [1, 1.5]$$



```

function S=splinenatural(X,Y)
%Este programa calcula los coeficientes del spline
%cubico, que interpola los nodos (X,Y)
%y tienen derivadas segunda en los extremos nulas
%(spline natural)
N=length(X)-1;
H=diff(X);
E=diff(Y)./H;
diagsupinf=H(2:N-1);
diagprinc=2*(H(1:N-1)+H(2:N));

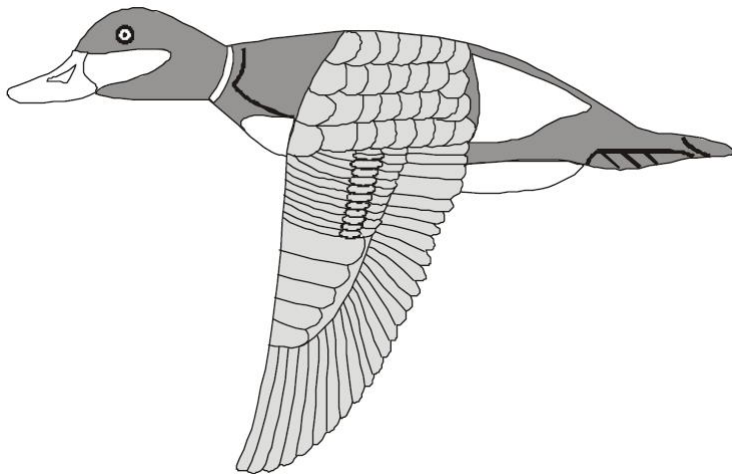
g0=0;gn=0; %Restriccion del spline natural|
A=diag(diagprinc)+diag(diagsupinf,1)+diag(diagsupinf,-1);
b=6*diff(E');

g=A\b;
g=[g0,g',gn];
for i=1:N
    S(i,1)=(g(i+1)-g(i))/(6*H(i));
    S(i,2)=g(i)/2;
    S(i,3)=E(i)-H(i)*(g(i+1)+2*g(i))/6;
    S(i,4)=Y(i);
end

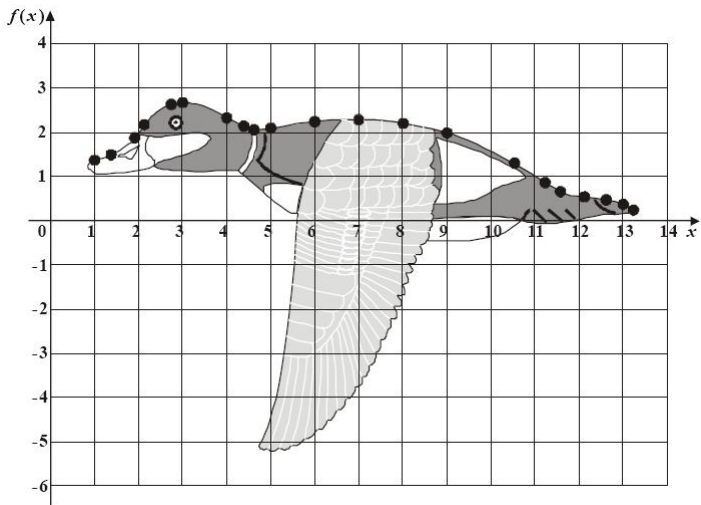
```



# Aplicación



## Aplicación



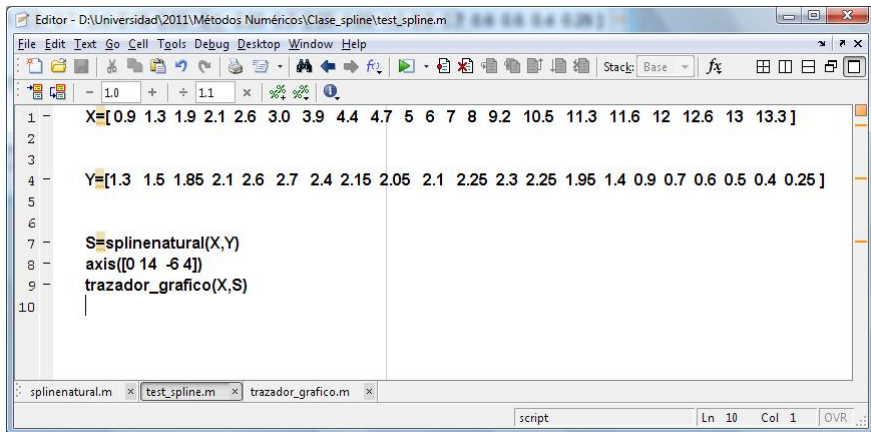
# Aplicación

$x$	0,9	1,3	1,9	2,1	2,6	3,0	3,9	4,4	4,7	5,0	6,0
$f(x)$	1,3	1,5	1,85	2,1	2,6	2,7	2,4	2,15	2,05	2,1	2,25

$x$	7,0	8,0	9,2	10,5	11,3	11,6	12,0	12,6	13,0	13,3
$f(x)$	2,3	2,25	1,95	1,4	0,9	0,7	0,6	0,5	0,4	0,25



# Aplicación



The screenshot shows a MATLAB editor window with the following code:

```
1 - X=[0.9 1.3 1.9 2.1 2.6 3.0 3.9 4.4 4.7 5 6 7 8 9.2 10.5 11.3 11.6 12 12.6 13 13.3]
2
3
4 - Y=[1.3 1.5 1.85 2.1 2.6 2.7 2.4 2.15 2.05 2.1 2.25 2.3 2.25 1.95 1.4 0.9 0.7 0.6 0.5 0.4 0.25]
5
6
7 - S=splinenatural(X,Y)
8 - axis([0 14 -6 4])
9 - trazador_grafico(X,S)
10 |
```

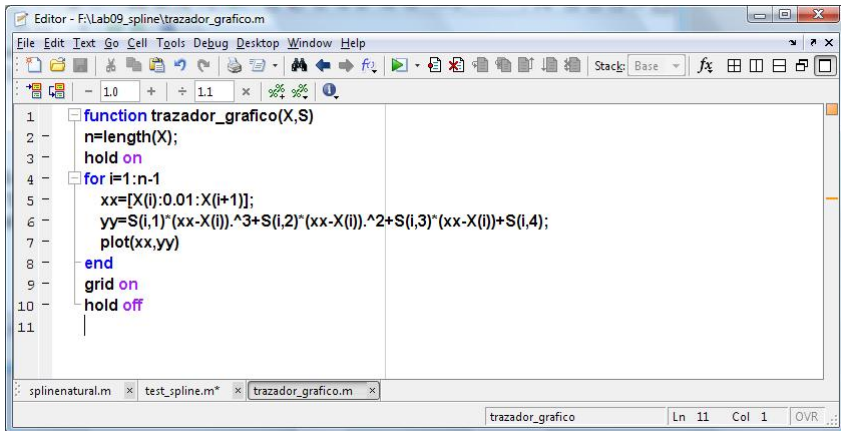
The window title is "Editor - D:\Universidad\2011\Métodos Numéricos\Clase\_spline\test\_spline.m". The status bar at the bottom indicates "Ln 10 Col 1 OVR".

Command Window

S =

-0.2476	0	0.5396	1.3000
0.9469	-0.2972	0.4208	1.5000
-2.9564	1.4073	1.0868	1.8500
-0.4466	-0.3666	1.2949	2.1000
0.4451	-1.0365	0.5934	2.6000
0.1742	-0.5025	-0.0222	2.7000
0.0781	-0.0322	-0.5034	2.4000
1.3142	0.0849	-0.4771	2.1500
-1.5812	1.2676	-0.0713	2.0500
0.0431	-0.1555	0.2623	2.1000
-0.0047	-0.0261	0.0808	2.2500
-0.0244	-0.0401	0.0146	2.3000
0.0175	-0.1135	-0.1390	2.2500
-0.0127	-0.0506	-0.3358	1.9500
-0.0203	-0.1002	-0.5318	1.4000
1.2134	-0.1490	-0.7312	0.9000
-0.8393	0.9431	-0.4929	0.7000
0.0364	-0.0640	-0.1413	0.6000
-0.4480	0.0014	-0.1789	0.5000
0.5957	-0.5361	-0.3928	0.4000





The image shows a MATLAB editor window titled "Editor - F:\Lab09\_spline\trazador\_grafico.m". The window contains the following MATLAB code:

```
1 function trazador_grafico(X,S)
2     n=length(X);
3     hold on
4     for i=1:n-1
5         xx=[X(i):0.01:X(i+1)];
6         yy=S(i,1)*(xx-X(i)).^3+S(i,2)*(xx-X(i)).^2+S(i,3)*(xx-X(i))+S(i,4);
7         plot(xx,yy)
8     end
9     grid on
10    hold off
11
```

The window also shows a toolbar with various icons for file operations, editing, and execution. The status bar at the bottom indicates the current file is "trazador\_grafico" and the cursor is at line 11, column 1.



