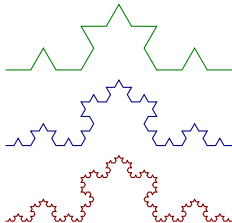


Ajuste de Curvas

Mg. Hermes Pantoja Carhuavilca

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica



Métodos Numérico

Agenda



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

Ajuste de Curvas

Ajuste de Curvas

Problema



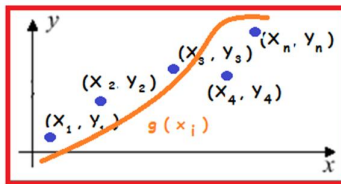
Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

Aproximación polinomial de datos

- ▶ Tenemos N mediciones experimentales $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$
- ▶ Queremos encontrar una función de aproximación $g(x)$ tal que

$$g(x_i) \approx y_i \quad i = 1, \dots, n$$



queremos además que $g(x)$ sea la que mejor aproxime las mediciones

3

Ajuste de Curvas



1. De un modo general, una función aproximante dependerá de varias constantes , es decir:

$$g(x) = F(x, c_1, c_2, \dots, c_k)$$

2. Definimos las desviaciones como:

$$d_i = y_i - F(x_i, c_1, c_2, \dots, c_k) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. La función aproximada deberá ser escogida de forma que tales desviaciones sean pequeñas en valor absoluto.
4. Esta función puede ser elegida como una combinación lineal de otras:

$$F(x, c_1, \dots, c_k) = c_1\phi_1 + \dots + c_k\phi_k$$



Ajuste por una recta (Ajuste Lineal)

$$F(x) = c_1 + c_2x \text{ con } \begin{cases} \phi_1(x) = 1 \\ \phi_2(x) = x \\ \phi_i(x) = 0, \quad i = 3, 4, \dots, k \end{cases}$$

Ajuste por una parábola (Ajuste cuadrático)

$$F(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 \text{ con } \begin{cases} \phi_1(x) = 1 \\ \phi_2(x) = x \\ \phi_3(x) = x^2 \\ \phi_i(x) = 0, \quad i = 4, 5, \dots, k \end{cases}$$

Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

5

Ajuste de Curvas

Recta de Regresión de Mínimos Cuadrados



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

- ▶ La recta de regresión o recta óptima en mínimos cuadrados consiste en obtener los coeficientes de la ecuación de la recta:

$$y = f(x) = Ax + B$$

- ▶ Que minimiza el error cuadrático medio $E_2(f)$

$$E_2(f) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(x_k) - y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

6

Ajuste de Curvas

19

Recta de Regresión de Mínimos Cuadrados



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

7 Ajuste de Curvas

- ▶ Sea un conjunto de n puntos (x_k, y_k) donde $k = 1$ hasta n , cuyas abscisas $\{x_k\}$ son todas distintas, la recta de regresión o recta óptima en mínimos cuadrados, es la recta de ecuación $y = f(x) = Ax + B$ que minimiza el error medio cuadrático $E_2(f)$.
- ▶ El error medio cuadrático es mínimo si la siguiente expresión es mínima:

$$n \cdot (E_2(f))^2 = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - y_k|^2$$

Recta de Regresión de Mínimos Cuadrados



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

- ▶ Si sustituimos en la ecuación anterior la ecuación de la recta, entonces

$$E(A, B) = \sum_{k=1}^n (Ax_k + B - y_k)^2$$

- ▶ El valor mínimo de la función $E(A, B)$ se calcula igualando a cero sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial E(A, B)}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial E(A, B)}{\partial B} = 0$$

8

Ajuste de Curvas

19

Recta de Regresión de Mínimos Cuadrados



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

Teorema (Recta de Regresión en Mínimos Cuadrados)

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ puntos cuyas abcisas $\{x_k\}_{k=1}^n$ son distintas entonces los coeficientes de la recta de regresión

$$y = Ax + B$$

son la solución del siguiente sistema lineal, conocido como las **ecuaciones normales de Gauss**:

$$\begin{aligned} (\sum_{k=1}^n x_k^2) A + (\sum_{k=1}^n x_k) B &= \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ (\sum_{k=1}^n x_k) A + nB &= \sum_{k=1}^n y_k \end{aligned}$$

9

Ajuste de Curvas

Forma Matricial del ajuste o regresión por mínimos cuadrados



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes Pantoja C.

Sistema sobre-determinado para ajuste de una recta

Dado los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ la recta de regresión

$$y = Ax + B$$

Forma Matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}}_v = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_b$$

10 Ajuste de Curvas



$$M.v = b$$

$$M^t.M.v = M^t.b$$

$$(M^t.M)^{-1}.M^t.M.v = (M^t.M)^{-1}.M^t.b$$

Ecuación Normal

$$v = (M^t.M)^{-1}.M^t.b$$

Ejemplo



- Ejemplo: A partir de un ensayo experimental se obtuvieron los siguientes pares de puntos (-1, 10), (0,9), (1,7), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 0), (6, -1). Obtener la ecuación de la recta aproximada. Primero se calculan los coeficientes de las ecuaciones normales de Gauss:

x_k	y_k	$(x_k)^2$	$x_k y_k$
-1	10	1	-10
0	9	0	0
1	7	1	7
2	5	4	10
3	4	9	12
4	3	16	12
5	0	25	0
6	-1	36	-6
20	37	92	25

Aplicamos la ecuación (5)

$$92A + 20B = 25$$

$$20A + 8B = 37$$

$$A \approx -1.607 \quad B \approx 8.643$$

$$y = -1.607x + 8.643$$

Ajuste de Curvas



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

- ▶ Supóngase que se quiere ajustar un conjunto de datos a una curva exponencial de la forma:

$$y = Ce^{Ax}$$

- ▶ Aplicamos logaritmo en ambos miembros de la ecuación

$$\ln(y) = \ln(Ce^{Ax})$$

$$\ln(y) = \ln(C) + \ln(e^{Ax})$$

$$\ln(y) = AX + \ln(C)$$

$$Y = AX + B$$

- ▶ De esta manera queda linealizada la ecuación y se pueden hacer los siguientes cambios de variable:

$$Y = \ln(y), \quad X = x, \quad y \quad B = \ln(C)$$

13 Ajuste de Curvas



- ▶ Mediante el cambio de variable los datos quedan de la siguiente forma: $(X_k, Y_k) = (x_k, \ln(y_k))$; a este proceso se le conoce como **método de linealización de datos**. Luego se aplican las ecuaciones normales de Gauss.
- ▶ Luego que se obtienen A y B , se calcula el parámetro C :

$$C = e^B$$

Ejemplo



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

- Ejemplo: Utilice el método de linealización de datos para hallar el ajuste exponencial $y=Ce^{4x}$ a los cinco datos: (0, 1.5), (1, 2.5), (2, 3.5), (3, 5.0) y (4, 7.5). Aplicando los cambios de variable:

15 Ajuste de Curvas

x_k	y_k	X_k	$Y_k=\ln(y_k)$	X_k^2	$X_k Y_k$
0.0	1.5	0.0	0.4054	0.0	0
1.0	2.5	1.0	0.9162	1.0	0.9162
2.0	3.5	2.0	1.2527	4.0	2.5055
3.0	5.0	3.0	1.6094	9.0	4.8283
4.0	7.5	4.0	2.0149	16.0	8.0596
		10	6.1988	30.0	16.3097

Ejemplo



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes Pantoja C.

16 Ajuste de Curvas

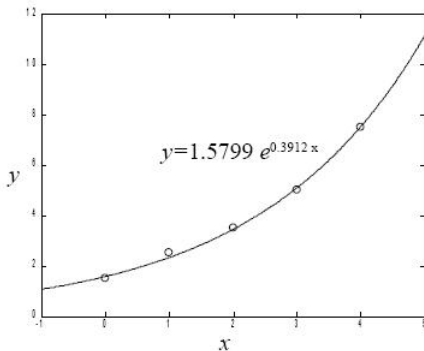
- Aplicando la ecuación para el cálculo de los coeficientes de las ecuaciones normales de Gauss, se tiene:

$$30A + 10B = 16.3097$$

$$10A + 5B = 6.1988$$

$$A \approx 0.3912 \quad B \approx 0.4574$$

$$C = e^{0.4574} = 1.5799$$





- Cambios de variables para linealizar datos:

Función, $y=f(x)$	Linealización, $Y=Ax+B$	Cambios
$y = A/x + B$	$y = A/x + B$	$X = 1/x, Y = y$
$y = 1 / (A x + B)$	$1/y = A x + B$	$X = x, Y = 1/y$
$y = A \ln(x) + B$	$y = A \ln(x) + B$	$X = \ln(x), Y = y$
$y = C e^{Ax}$	$\ln(y) = A x + B$	$X = x, Y = \ln(y),$ $B = \ln(C), C = e^B$
$y = C x^A$	$\ln(y) = A \ln(x) + B$	$X = \ln(x), Y = \ln(y),$ $B = \ln(C), C = e^B$

Factor de Regresión



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

18 Ajuste de Curvas

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_m)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_m)^2}$$

\hat{y}_i de la función de ajuste

.

y_i de la data

.

$$y_m = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

Factor de Regresión



Ajuste de Curvas

Mg. Hermes
Pantoja C.

19 Ajuste de Curvas

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

- ▶ El factor de regresión mide la eficiencia del ajuste,
- ▶ Cuando $R^2 = 1$ la función de ajuste coincide con la data.
- ▶ Cuando R^2 es cercano a 1 el ajuste se considera aceptable.
- ▶ Cuando R^2 es cercano a 0 el ajuste se considera pésimo o deficiente